

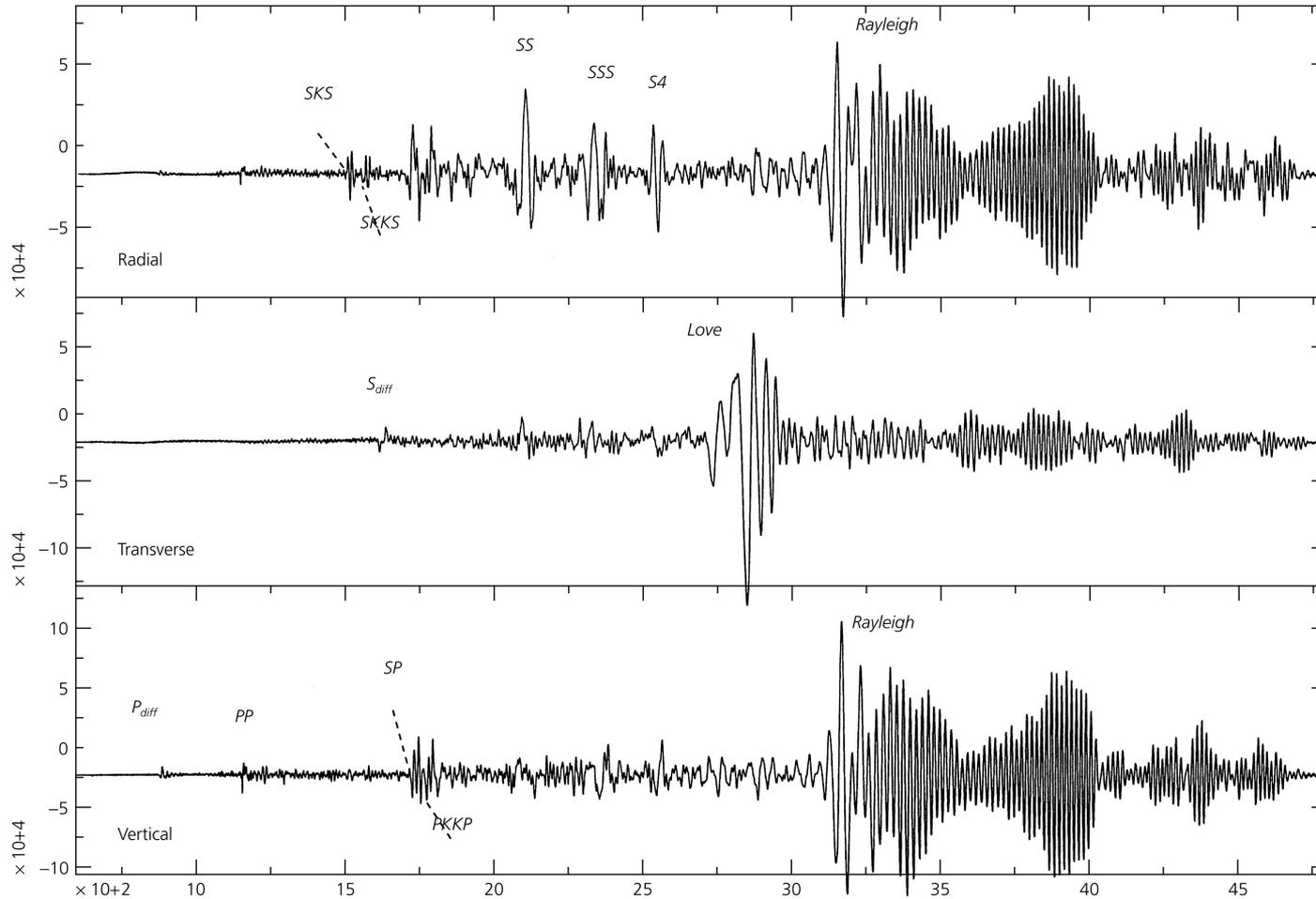
Michel.Campillo@ujf-grenoble.fr

Documents:

<http://isterre.fr/annuaire/pages-web-du-personnel/michel-campillo/>

Ondes de surface: observations

Figure 2.7-1: Seismograms recorded at a distance of 110°, showing surface waves.



Figures de: Stein and Wyession

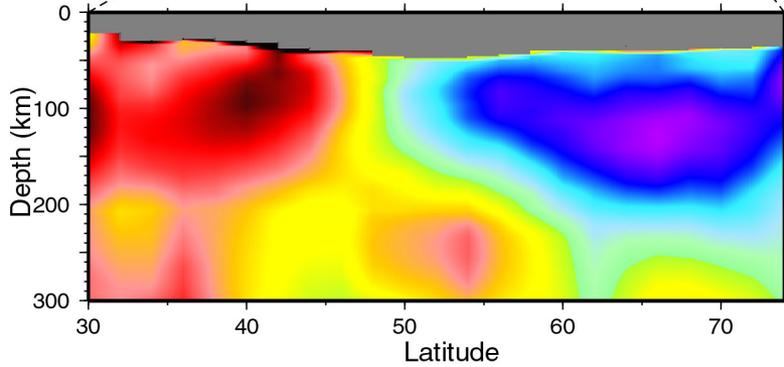
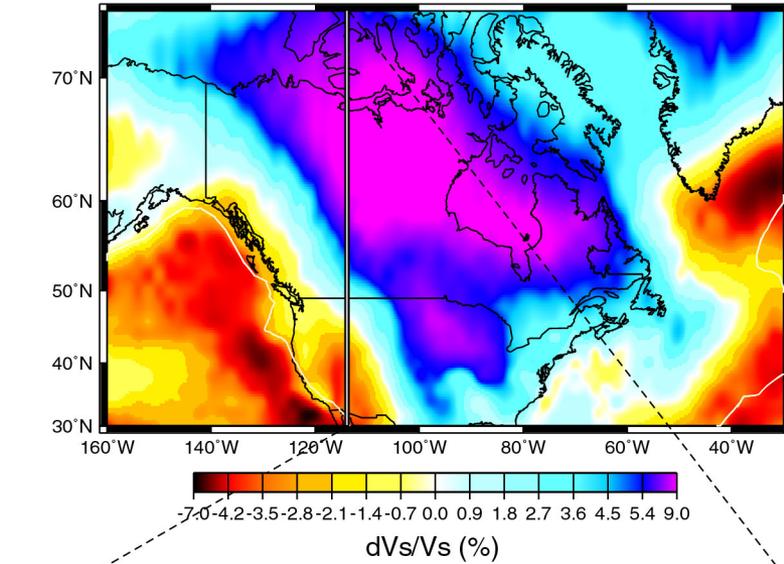
TUE415

Pourquoi étudier les ondes de surface:

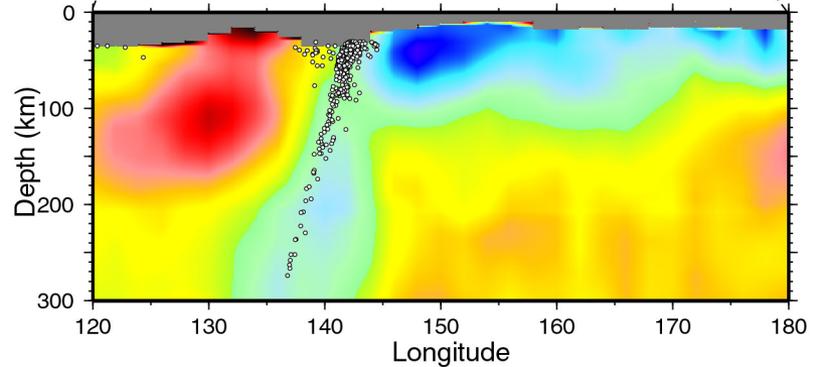
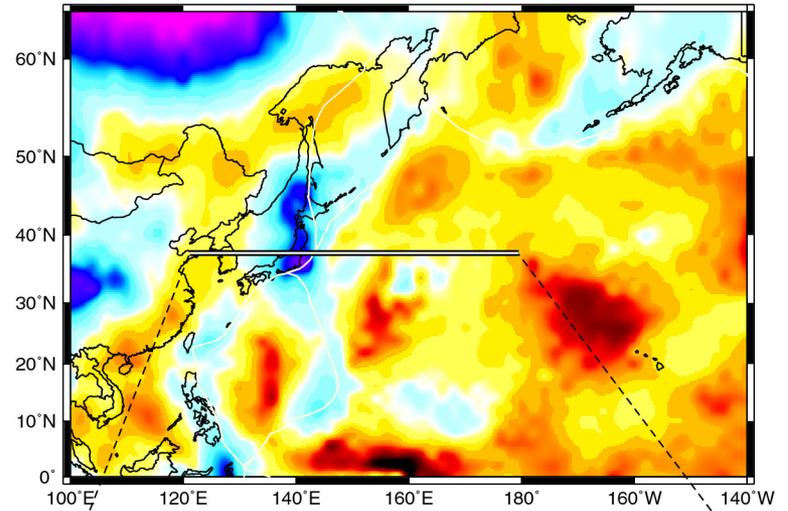
- souvent arrivées dominantes
- cachent les échos profonds
- servent pour imager le sous sol à toutes les échelles
- servent à la quantification des grands séismes

3D Vs Model

North America



North-Western Pacific

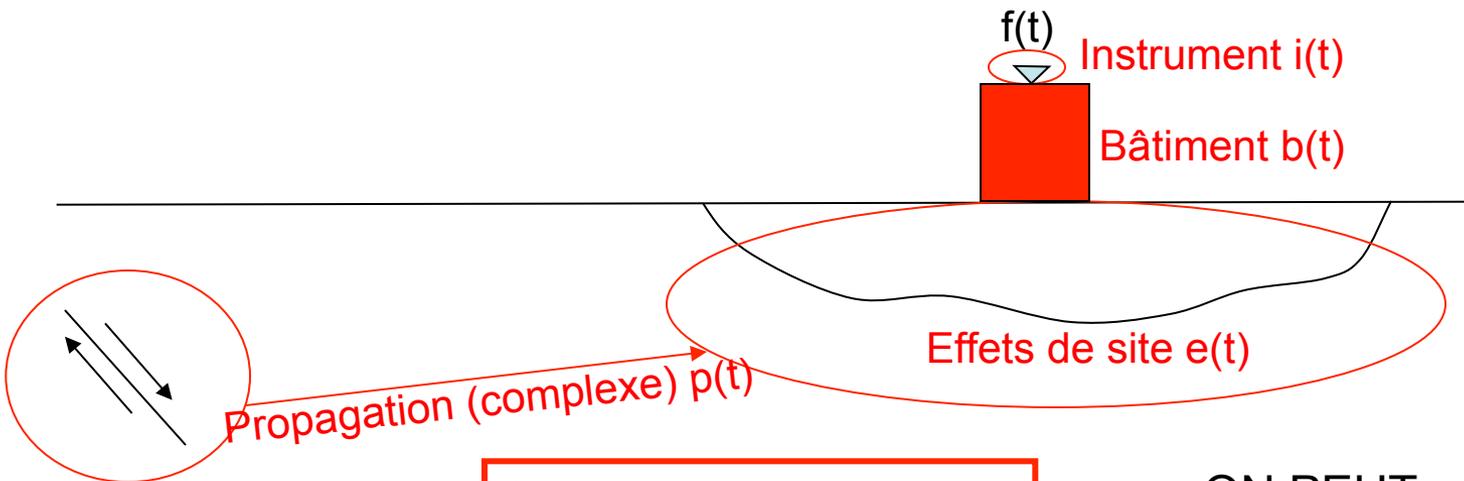


Produit de convolution



Vitesse du sol $v(t)$ Sismomètre Tension $V(t)$

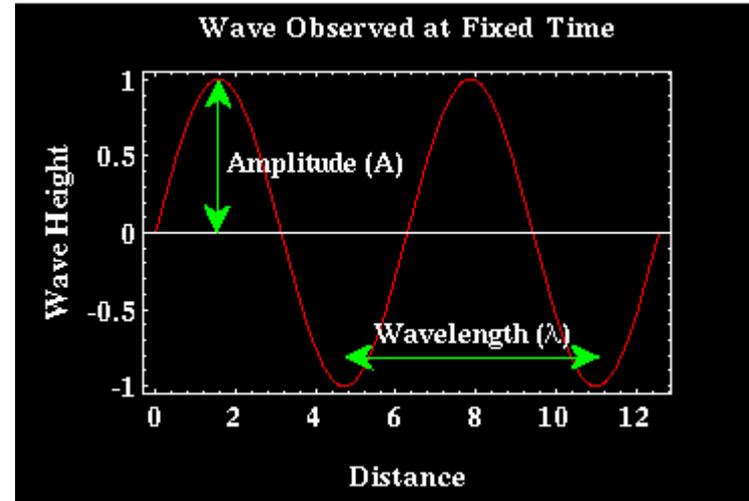
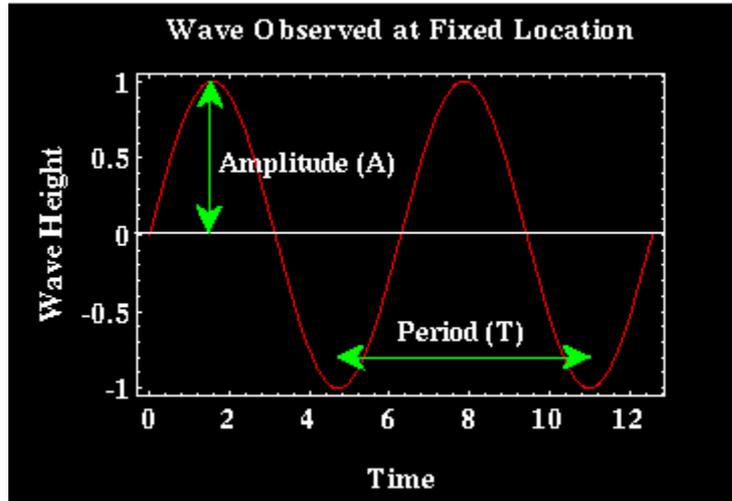
Source sismique Sol Déplacement du sol



$$f(t) = s(t) * p(t) * e(t) * b(t) * i(t)$$
$$F(f) = S(f)P(f)E(f)B(f)I(f)$$

ON PEUT
ETUDIER
CHAQUE EFFET
SEPAREMENT!!

Vibrations: période, fréquence et longueur d'onde



$$f(x,t) = A \sin(\omega t - kx - \phi)$$

Vitesse	V [m/s]
Longueur d'onde	$\lambda = VT$
	$= V/f$ [m]
Nombre d'onde	$k = 2\pi/\lambda$ [rad/m]

Temps	t [s]
Phase	ϕ [rad]
Amplitude	A []
Période	T [s]
Fréquence	f [Hz]
Pulsation	$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ [rad/s]

Le domaine des fréquences

Comment peut-on se permettre de regarder une onde d'une fréquence particulière?

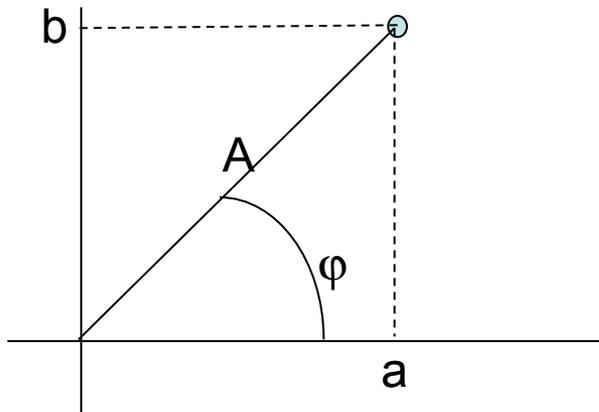
PARCE QUE toute série temporelle (physique) peut être considérée comme une somme de fonctions harmoniques

Qu'est-ce qu'une fonction harmonique: $\sin(f(\mathbf{x},t))$, $\cos(f(\mathbf{x},t))$, $\exp(f(\mathbf{x},t)i)$

Attention: $\exp(iq) = \cos q + i \sin q$

Un nombre complexe $z = a + ib = A \exp(i\varphi)$

Parties réelle et imaginaire Amplitude (module) Phase (argument)



Transformée de Fourier

Prenons maintenant une fonction complexe $g(t)$ quelconque
Dans quelle mesure est-ce que $g(t)$ se compare à une exponentielle $\exp(i2\pi ft)$?

On va calculer la ressemblance par le produit scalaire

$$\langle g(t), \exp(i2\pi ft) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i2\pi ft) dt = G(f) \quad \text{Transformée de Fourier}$$

G est un nombre complexe $\Rightarrow G$ a une amplitude $|G|$ et une phase φ

On pourra maintenant reconstituer $g(t)$ comme la somme des exponentielles complexes, chacune multipliée avec la bonne amplitude $|G|$ et décalée correctement sur l'axe du temps. Cela revient à multiplier l'exponentielle avec $G(f)$.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(i2\pi ft) df \quad \text{Transformée de Fourier inverse}$$

Transformée de Fourier

ATTENTION

Les définitions varient

TF: $-i\omega t$

TFI: $+i\omega t$

Dans une grande partie des livres (la moitié..) le signe est inversé

ATTENTION

Il y a un problème d'amplitude

Avec notre définition, $\text{TFI}(\text{TF}(g(t)))=2\pi g(t)$

Il y a 3 façons différentes de régler ce problème – que l'on va négliger ici.

Transformée de Fourier

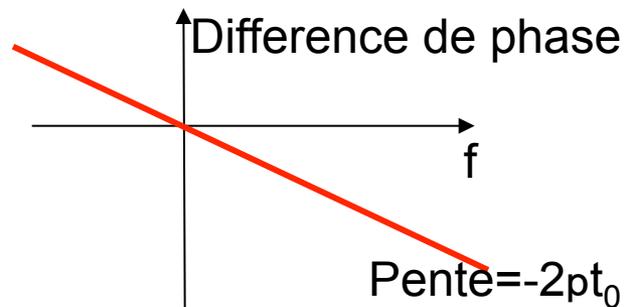
Deux théorèmes importants

- $TF(g'(t))=i2\pi fG(w)$

Application importante: on enregistre la vitesse $v(t)$ du déplacement avec un sismomètre. On peut aisément passer à l'accélération $a(t)=v'(t)$ (par multiplication avec $i2\pi f$ dans le domaine fréquentiel), ou au déplacement $u(t)$ (par division par $i2\pi f$).

- $TF(g(t-t_0))=G(w)\exp(-i2\pi ft_0)$: changement de phase uniquement.

Application importante: Pour mesurer le décalage en temps entre deux signaux, on peut mesurer leur différence de phase



Equation des ondes

Exemple d'équation d'onde (cas acoustique 1D; corde)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Double dérivée en temps

Double dérivée en l'espace

V est la vitesse du matériau

Stein and Wysession, 2003

Ondes dans une corde

Figure 2.2-7: Reflected and transmitted amplitudes.

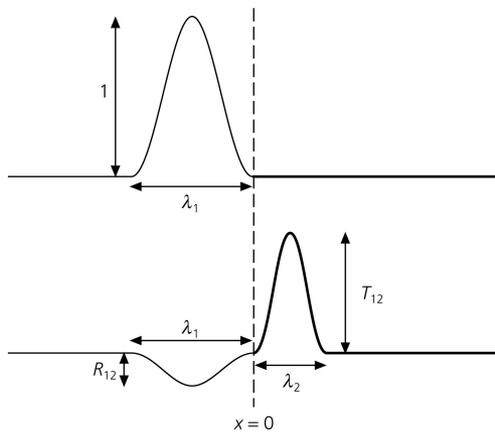


Figure 2.2-6: Waves on a string of two different densities.

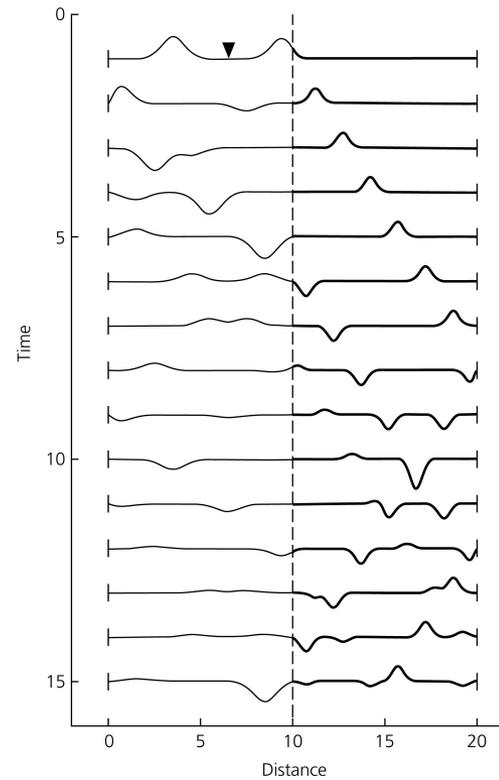
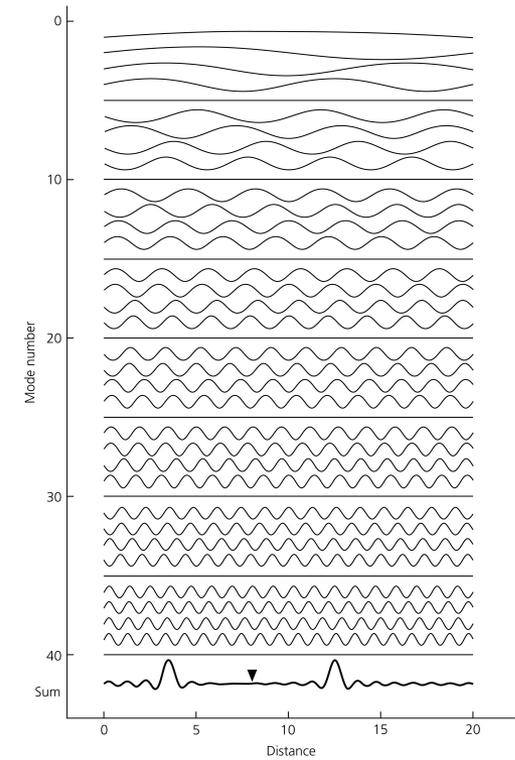


Figure 2.2-8: Waves on a string as a summation of modes.



Figures de: Stein and Wyession

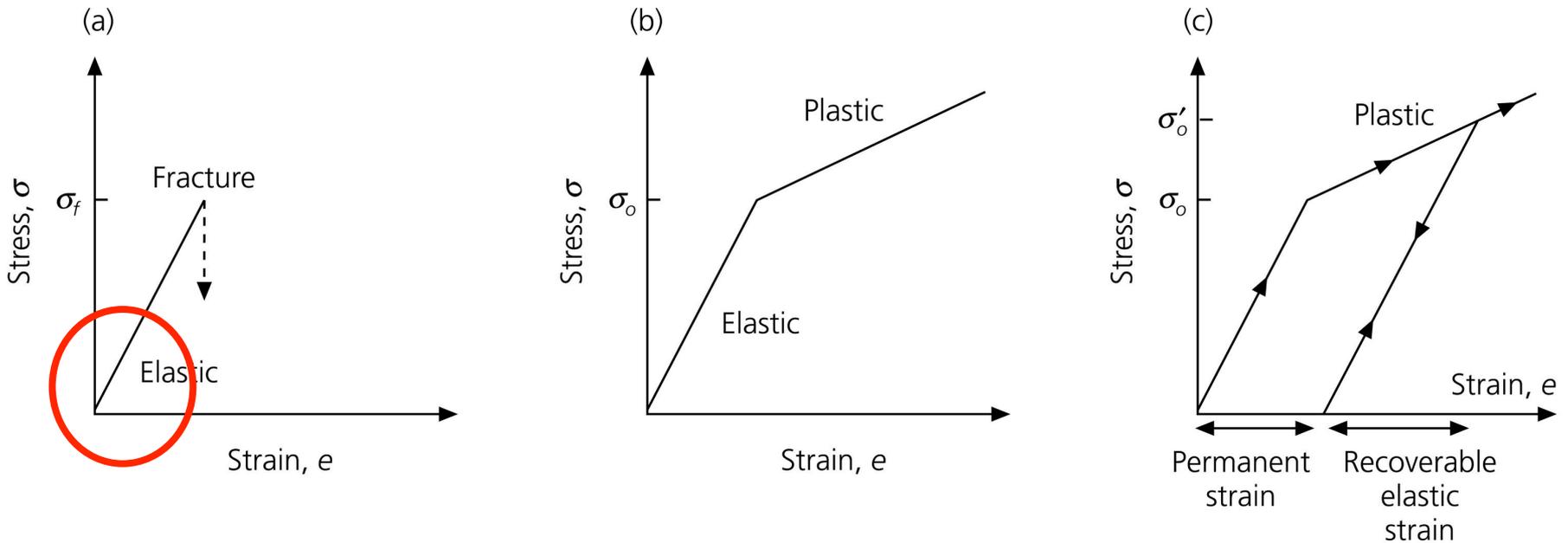
Élasticité

Hypothèses utilisées dans ce chapitre: on suppose

1. Que le corps considéré est formé de particules liées assez étroitement pour que les fonctions utilisées soient continues
2. Que les constantes ou paramètres élastiques qui définissent l'état du corps sont lentement variables d'un point à l'autre, l'homogénéité n'étant que locale. Les fonctions utilisées sont donc dérivables
3. Que les petites variations causées par l'onde dans le système des tensions élastiques en un point s'ajoutent à un état de pression hydrostatique, au lieu de s'appliquer à un état naturel sans contraintes
4. Que les vibrations se produisent adiabatiquement, c'est-à-dire que la transformation à l'intérieur d'un élément de volume s'effectue sans échange de chaleur avec les autres éléments de volume. Les paramètres élastiques adiabatiques sont peu différents des paramètres isothermes.

Élasticité

Figure 5.7-1: Elastic and plastic rheologies.



Ondes sismiques : correspond à un comportement élastique sauf parfois en région épicertrale

Stein and Wysession, 2003

Rappel des opérateurs vectoriels

Gradient

$$\vec{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergence

$$\text{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Rotationnel

$$\vec{\text{rot}}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

L'ELASTICITE EN DEUX MOTS

→ milieu continu , faibles déformations

$\vec{d}(u, v, w)$ déplacement champ vectoriel

→ déformations : ★ normales $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$

$$\star \text{ cisailantes } \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \dots$$

Elasticité isotrope → Loi de Hooke : relation linéaire entre déformation et contrainte: τ_{ij} : force direction i appliquée sur face normale j / m².

$$\sigma_{ij} = \lambda D \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

D dilatation : $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \text{div } \vec{d}$

Équation des ondes: milieu isotrope

Loi de Hooke pour un milieu isotrope:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

On peut démontrer alors que

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Et que l'équation des ondes peut s'écrire

$$(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div}(\vec{u})) + \mu \Delta \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \vec{f}$$

On peut utiliser que $\Delta \mathbf{u} = \text{grad}(\text{div}(\mathbf{u})) - \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{u}))$ pour démontrer

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div}(\vec{u})) - \mu \text{rot}(\text{rot}(\vec{u})) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \vec{f}$$

Propagation suivant Ox

$$\vec{d} = (u, 0, 0) \quad \frac{\partial \cdot}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$$

Déformation :

$$\varepsilon_{xx} \neq 0 \quad \varepsilon_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \text{rot } \vec{d} = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda D + 2 \mu \varepsilon_{xx} \\ &= (\lambda + 2 \mu) \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

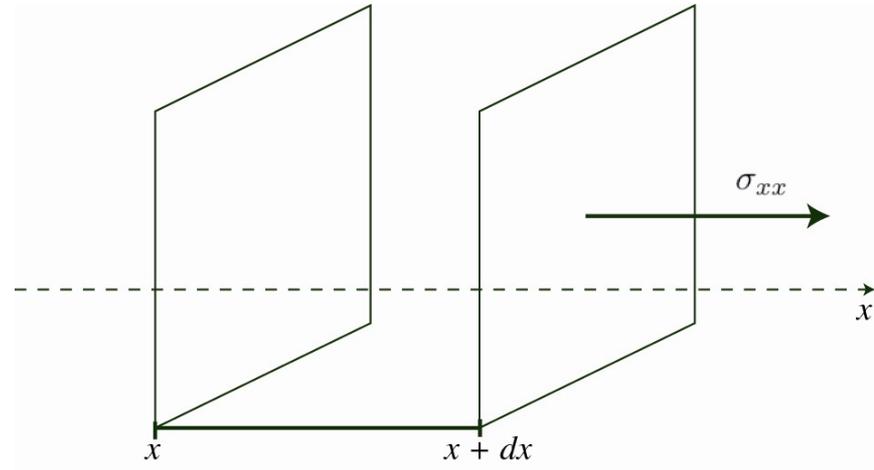
Bilan des forces sur l'élément dx

δF , densité de force

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= \sigma_{xx}(x + dx) - \sigma_{xx}(x) \\ &= \sigma_{xx}(x) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx - \sigma_{xx}(x) \end{aligned}$$

$$\delta F_x \, dx dy dz = \Delta \sigma_{xx} \, dy \, dz$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \\ \Rightarrow \delta F_x &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \delta F_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

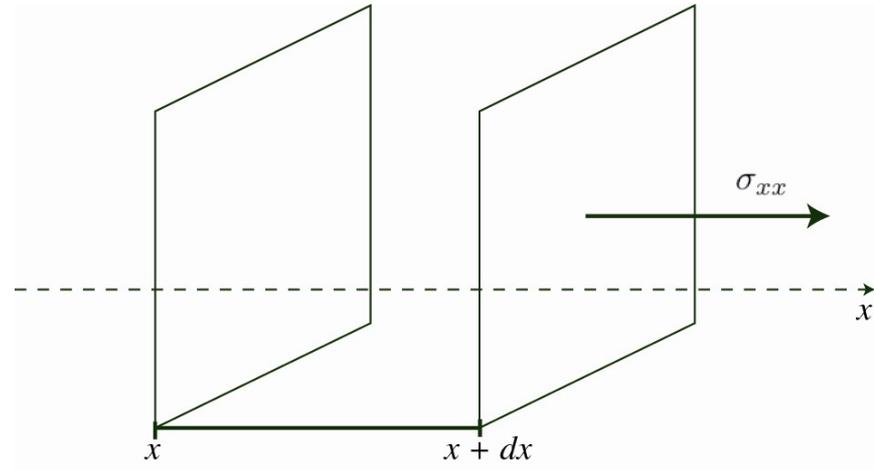
⇒ Equation de la dynamique.

$$F_x = m \gamma$$

$$\delta F_x dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

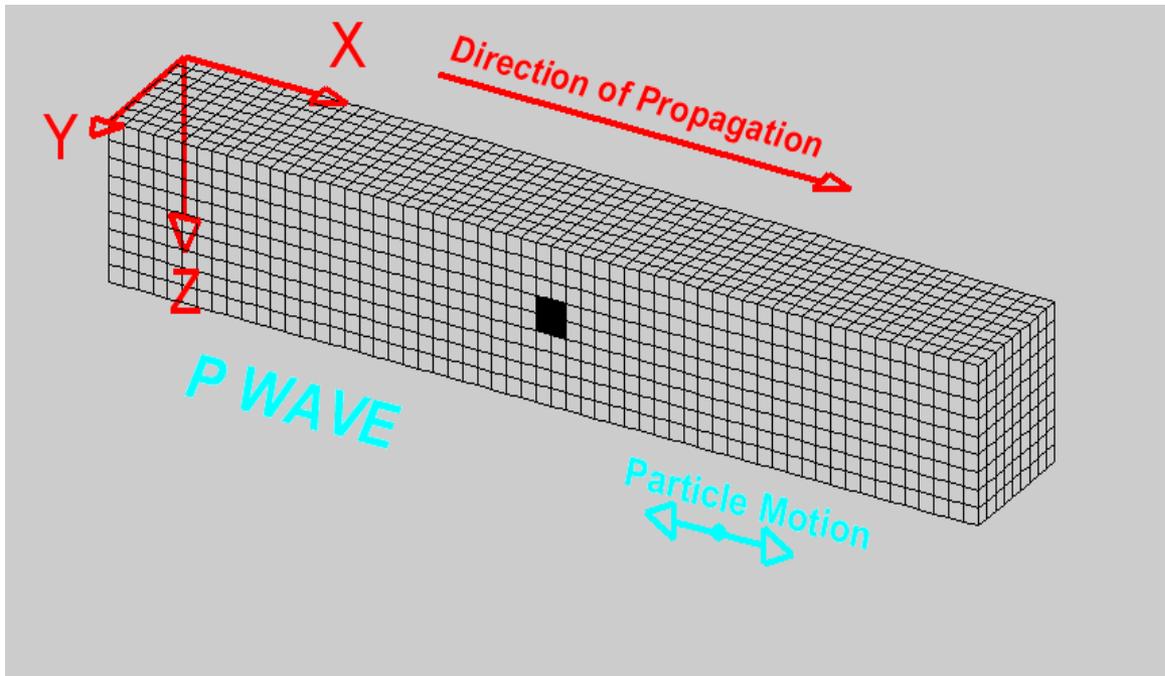
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

⇒ Equation des ondes : avec $C = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$



Equation des ondes P

Ondes de volume P



Propagation suivant Ox $\vec{d} = (0, v, 0)$

déformation élastique $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$

dilatation $D = 0$ ($div = 0$)

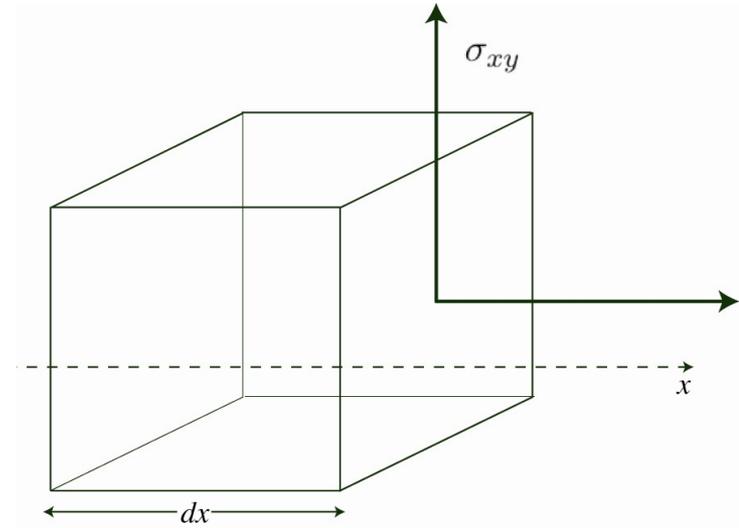
$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$dx \, dy \, dz \, \delta F_y = dy \, dz \, (\delta \sigma_{xy}) = dy \, dz \, \frac{\sigma_{xy}}{\partial x} \, dx$$

$$\Rightarrow \delta F_y = \frac{\sigma_{xy}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

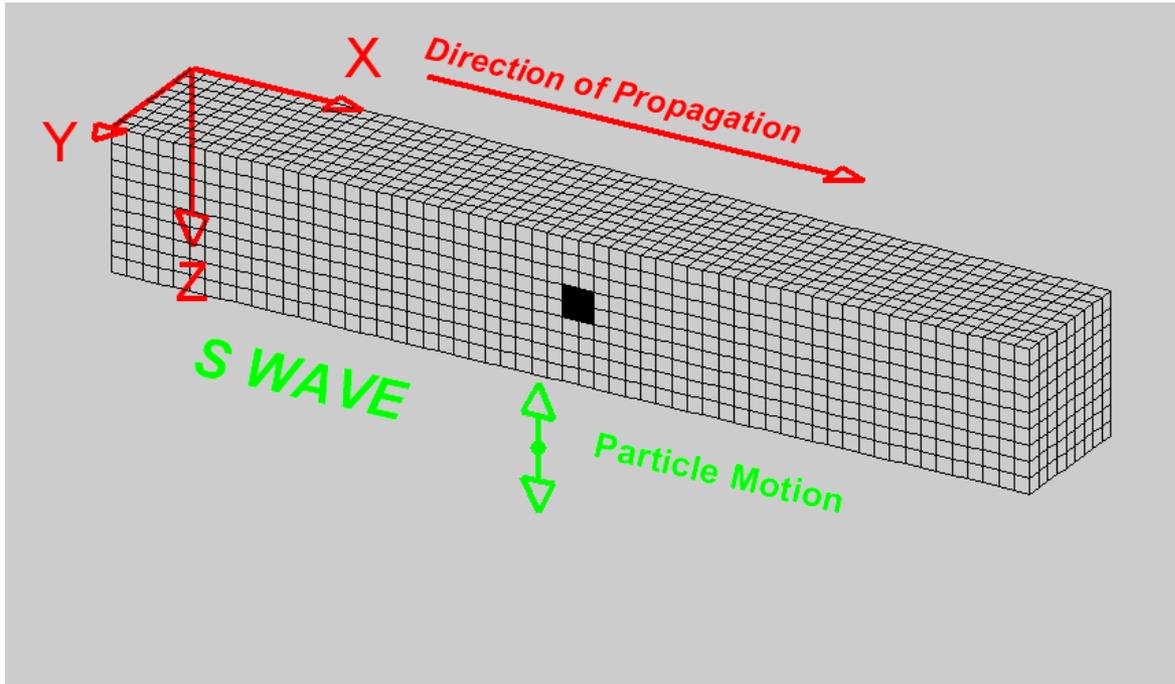
$$\Rightarrow \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \left(\text{avec } w = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \right)$$



Equation des ondes S

Ondes de volume S



EQUATION DE L'ELASTODYNAMIQUE

face OABC : force associée aux contraintes agissantes :

$$F_{OABC} \quad \sigma_{xx}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx}$$

→ Equilibre → $F_{OABC} = -F_{DEFG}$

→ Hors équilibre $\sigma_{xx}(x, y, z) ; \sigma_{yx}(x, y, z) \dots \sigma_{zx}(x, y, z)$

Sur OABC : $-\sigma_{xx}, -\sigma_{yx}, -\sigma_{zx}$

$$\text{Sur OABC : } \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx ; \quad \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx ; \quad \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx$$

Ces contraintes s'appliquent sur une surface $dy dz$ et affectent un volume $dx dy dz$. Les forces résiduelles par unités de volume sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \text{ dans la direction } x \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} & \text{ dans la direction } y \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} & \text{ dans la direction } z \end{aligned}$$

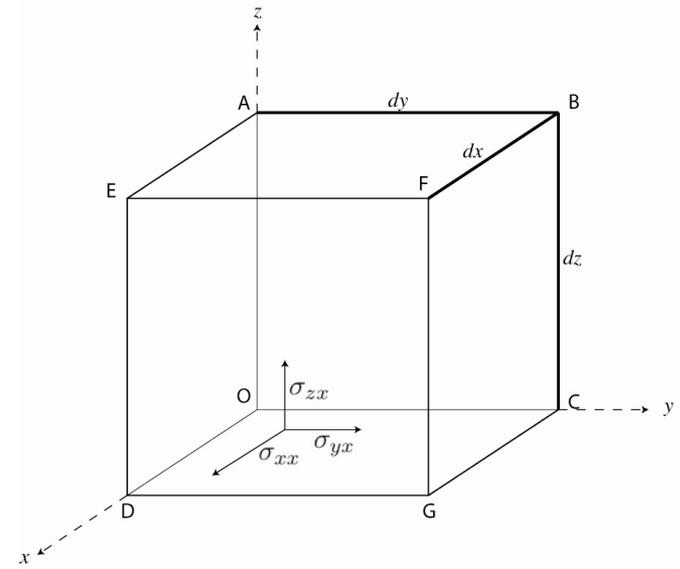
→ même analyse pour les autres faces.

On peut aussi écrire la force résiduelle totale dans la direction x :

$$F_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}$$

On peut écrire l'équation de la dynamique :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}$$



$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}$$

$$\sigma_{xx} = \lambda D + 2\mu \varepsilon_{xx} = \lambda \operatorname{div} \vec{d} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{yx} = 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{zx} = 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \lambda \frac{\partial D}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \lambda \frac{\partial D}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial D}{\partial x} + \mu \Delta u \end{aligned}$$

de manière identique :

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial D}{\partial y} + \mu \Delta v$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial D}{\partial z} + \mu \Delta w$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{d}) + \mu \Delta \vec{d}$$

→ Equation plus compliquée que l'équation des ondes.

Décomposition de Helmholtz

$$\vec{\Delta} \vec{V} = \text{grad} \text{div} \vec{V} - \text{rot} \text{rot} \vec{V} \quad \forall \vec{V} \text{ dérivable}$$

Si on pose $\vec{d} = \vec{\Delta} \vec{V}$ \vec{V} inconnu ; équation de Laplace

$$\Rightarrow \vec{d} = \text{grad} \Phi + \text{rot} \vec{\Psi} \quad \Phi = \text{div} \vec{V} ; \vec{\Psi} = -\text{rot} \vec{V}$$

Tout champ peut donc se décomposer \rightarrow newtonien

\rightarrow laplacien ou rotationnel

(Φ pas de rotation ; Ψ pas de dilatation / changement de volume)

\Rightarrow 2 équations d'onde : (avec condition aux limites nulle)

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi \quad \Rightarrow \quad V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{champ sans cisaillement}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mu \vec{\Delta} \vec{\Psi} \quad \Rightarrow \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{champ sans dilatation}$$

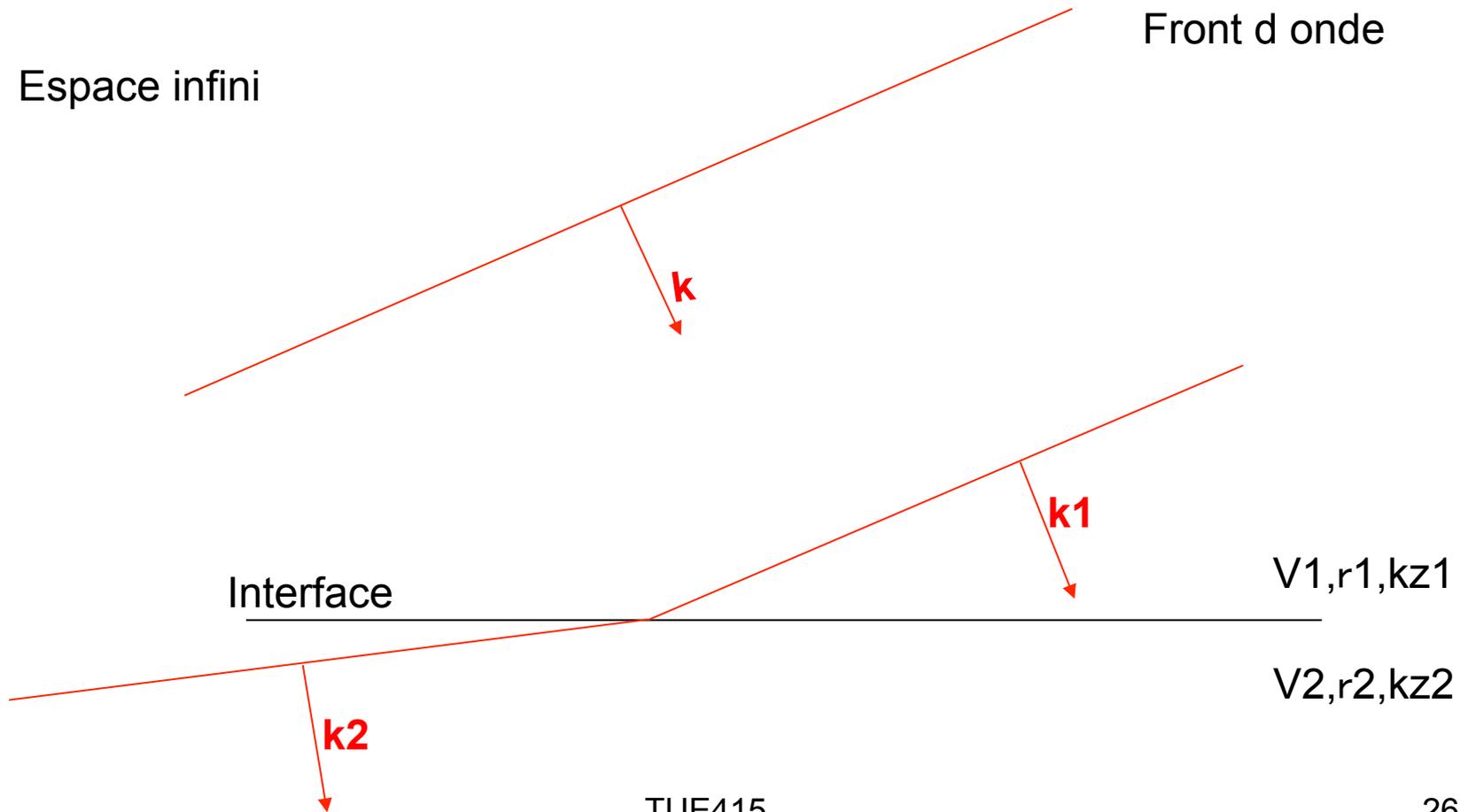
Pour des roches consolidées: $\lambda \approx \mu \rightarrow V_P \approx \sqrt{3}V_S$

Ondes planes

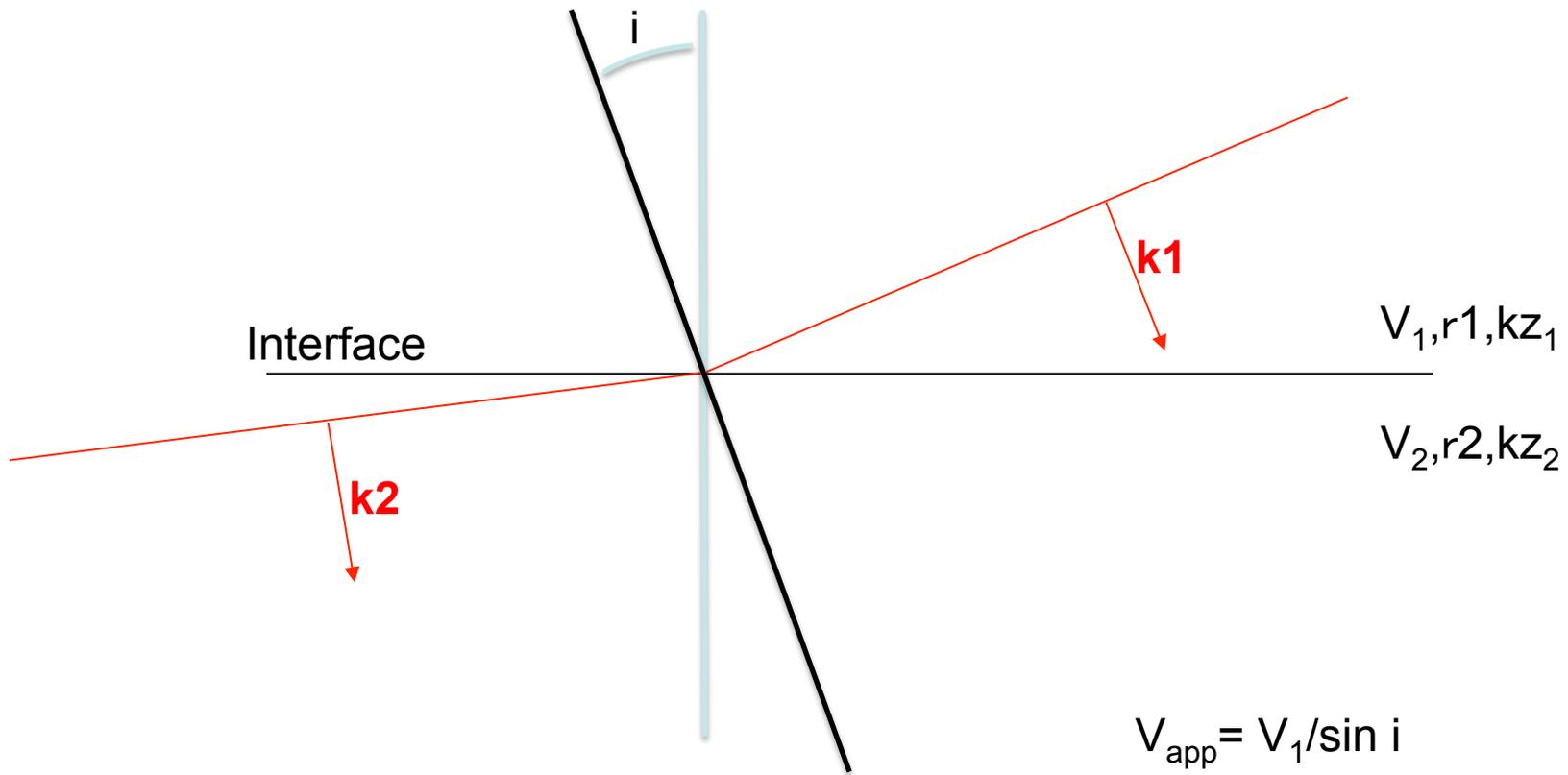
Si \mathbf{k} est constant dans l'espace, l'onde est plane.

Une même perturbation se trouve alors dans un plan dans l'espace.

Nous utiliserons des fonctions du type $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x})$



Notion de vitesse apparente le long de l'interface ou de la surface



Dans la suite on notera la vitesse apparente d'une onde plane monochromatique le long de la surface par C , la vitesse de phase.

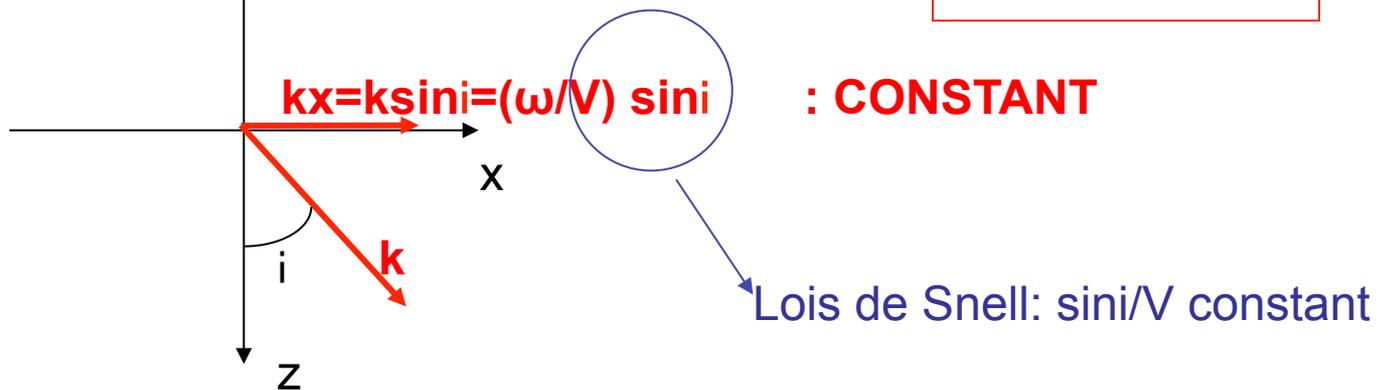
Le vecteur d ondes $\mathbf{k}=(k_x,k_y,k_z)$

Nous utiliserons des fonctions du type $\mathbf{A}()\exp(i\omega t-i\mathbf{k}\mathbf{x})$ pour exprimer les ondes (potentiels et déplacements)

On va maintenant définir un système de coordonnées tel que l'on travaille dans le plan x-z.

$$k^2=\omega^2/c^2=k_x^2+k_z^2$$

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{V^2} - k_x^2}$$



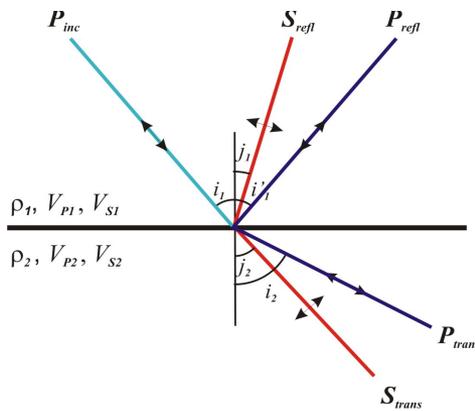
Onde plane à une interface plane – 1

Conditions aux limites pour l'équation des ondes élastodynamiques :

- solide / solide : – continuité des déplacements verticaux et horizontaux ④
 – continuité des contraintes normales et tangentiels
- solide / fluide : – continuité des déplacements verticaux ③
 – continuité des contraintes normales
 – annulation des contraintes tangentiels
- solide / vide : – annulation des contraintes normales et tangentiels ②
- fluide / vide : – annulation des contraintes normales ①

Loi de Snell-Descartes

P-SV



SH

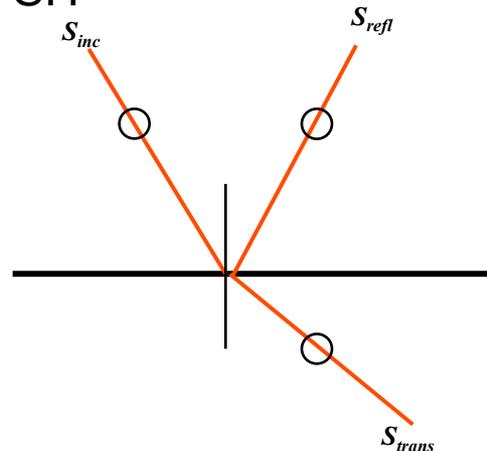


Diagram illustrating the Snell-Descartes law. An incident wave with angle i_1 in medium v_1 is refracted into medium v_2 at angle i_2 .

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$$

ONDE PLANE SH 2D :

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{et } u_2 = v$$

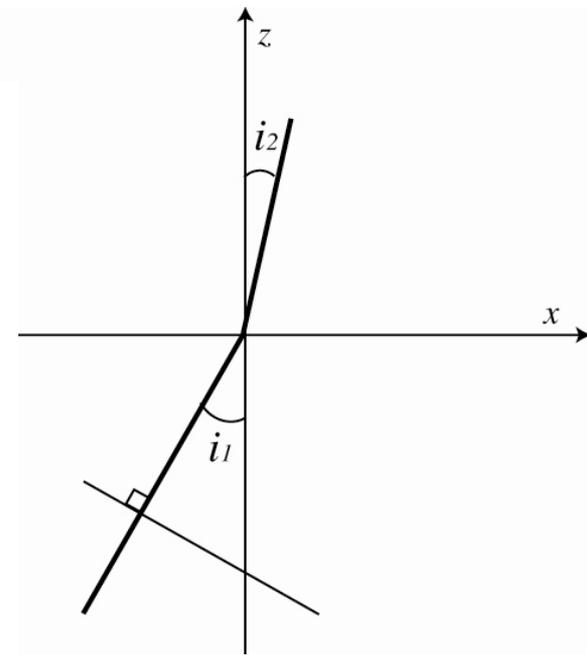
Onde incidente

$$v_i = v_0 \exp i(\omega t - k_x x - k_z z)$$

Ondes résultantes?

$$\text{réfléchie : } v_R = v_0 R \exp i(\omega t - ik'_x x + k'_z z)$$

$$\text{transmise : } v_T = v_0 T \exp i(\omega t - k''_x x - k''_z z)$$



⇒ remarque : valeur de k?

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_z^2$$

⇒ Conditions aux limites :

en $z = 0$; $\forall x$ $v_i + v_r = v_t$

$$\tau_i + \tau_r = \tau_t$$

déplacements

$$\exp(-ik_x x) + R \exp(-ik'_x x) = T \exp(-ik''_x x) \quad \forall x \Rightarrow k_x = k'_x = k''_x$$

$$k_x = \frac{\omega}{v_1} \sin i_1 \quad ; \quad k''_x = \frac{\omega}{v_2} \sin i_2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$$

$$1 + R = T$$

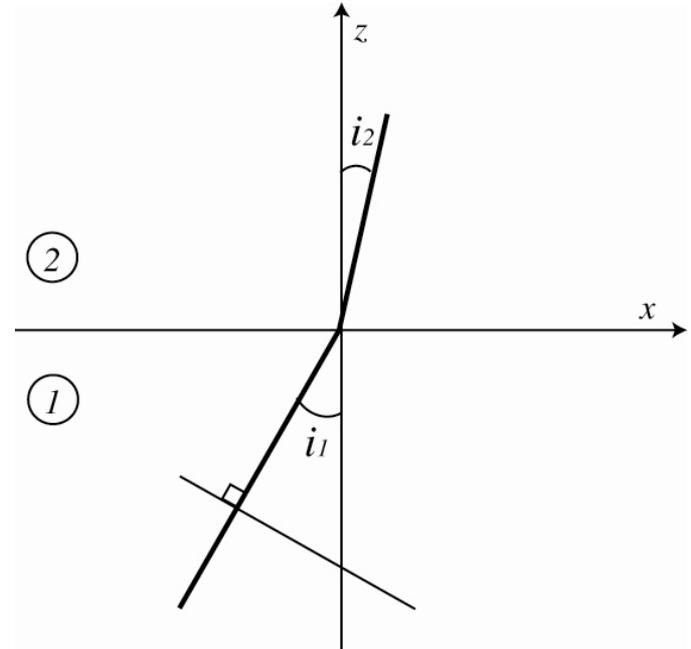
contraintes

$$\mu_1 (-ik_z + iRk_z) = \mu_2 (-ik''_z T)$$

$$1 - R = \frac{\mu_2 k''_z}{\mu_1 k_z} T = \frac{\mu_2 \cos i_2 \frac{\omega}{v_2}}{\mu_1 \cos i_1 \frac{\omega}{v_1}} T = \alpha T$$

$$2 = T(1 + \alpha) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{1 + \alpha}$$

$$2R = T(1 - \alpha) = 2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$



CRITICAL REFLEXION

$$\frac{\sin i_1}{V_1} = \frac{\sin i_2}{V_2}$$

Problem for : $V_1 < V_2$ Critical angle i_c ; $\sin i_c = \frac{V_1}{V_2}$

For $i_1 < i_c$ no geometrical interpretation ($\sin i_2 > 1$!)

$$R_{SS} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{1 - \left(\frac{\frac{\mu_2}{V_2} \cos i_2}{\frac{\mu_1}{V_1} \cos i_1} \right)}{1 + \left(\frac{\frac{\mu_2}{V_2} \cos i_2}{\frac{\mu_1}{V_1} \cos i_1} \right)}$$

$$\cos i_2 = (1 - \sin^2 i_2)^{1/2}$$

$$= (1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \sin^2 i_1)^{1/2}$$

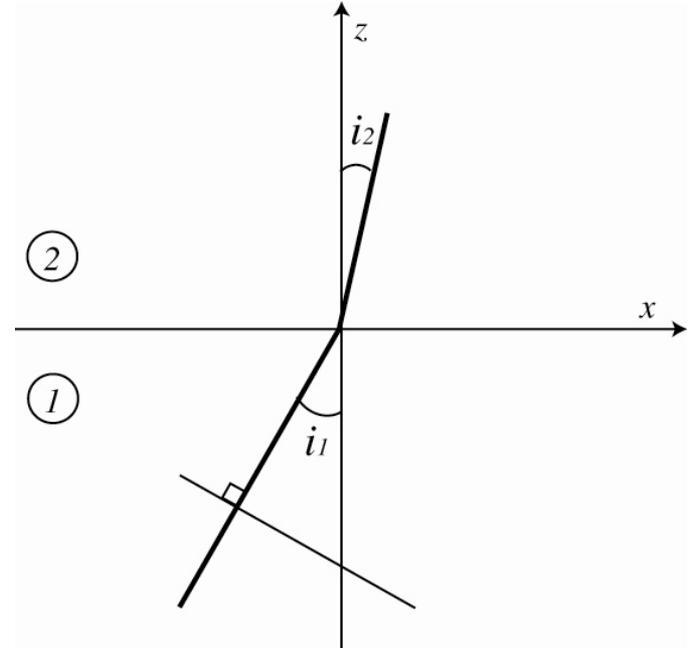
$$= i \sqrt{\frac{V_2^2}{V_1^2} \sin^2 i_1 - 1}$$

$$R_{SS} = \frac{1 - i \left(\frac{\frac{\mu_2}{V_2} \sqrt{\frac{V_2^2}{V_1^2} \sin^2 i_1 - 1}}{\frac{\mu_1}{V_1} \cos i_1} \right)}{1 + i \left(\frac{\frac{\mu_2}{V_2} \sqrt{\frac{V_2^2}{V_1^2} \sin^2 i_1 - 1}}{\frac{\mu_1}{V_1} \cos i_1} \right)}$$

$$R_{SS} = \frac{1 - i \tan(\Phi(i_1))}{1 + i \tan(\Phi(i_1))} = \exp(-2i\Phi(i_1))$$

$$\Rightarrow |R_{SS}| = 1 \quad \text{Phase shift} = 2\Phi(i_1)$$

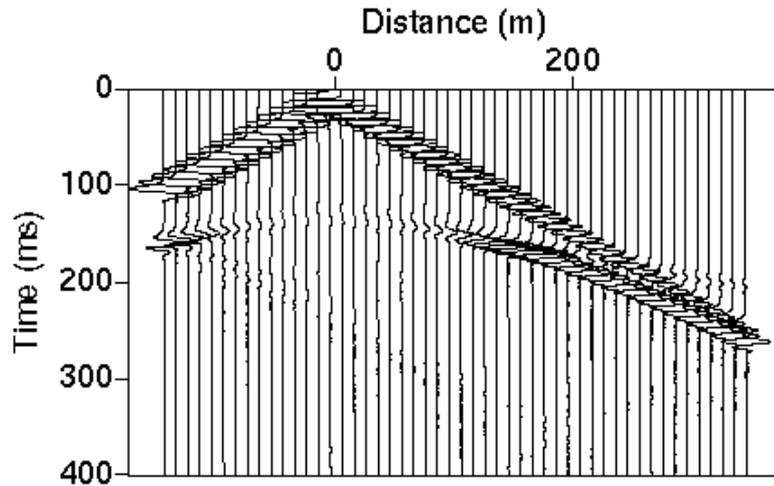
$$\tan \Phi(i) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{1 - \frac{C^2}{V_2^2}}{\frac{C^2}{V_1^2} - 1} \right)^{1/2}$$



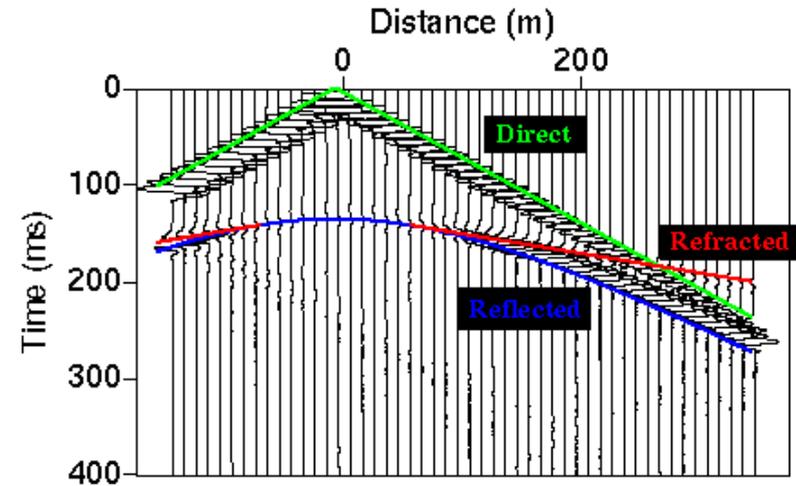
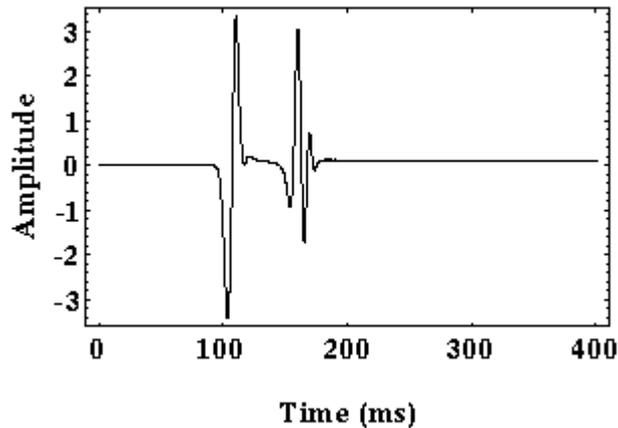
with C , the apparent velocity:

$$C = V_1 / \sin i_1$$

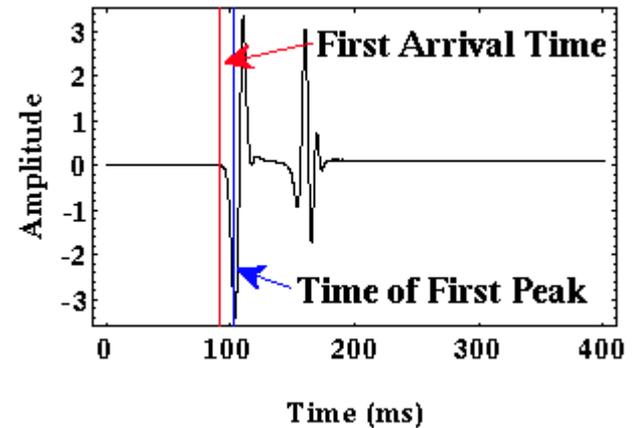
Formes d'ondes et temps d'arrivée



Offset = 150 m

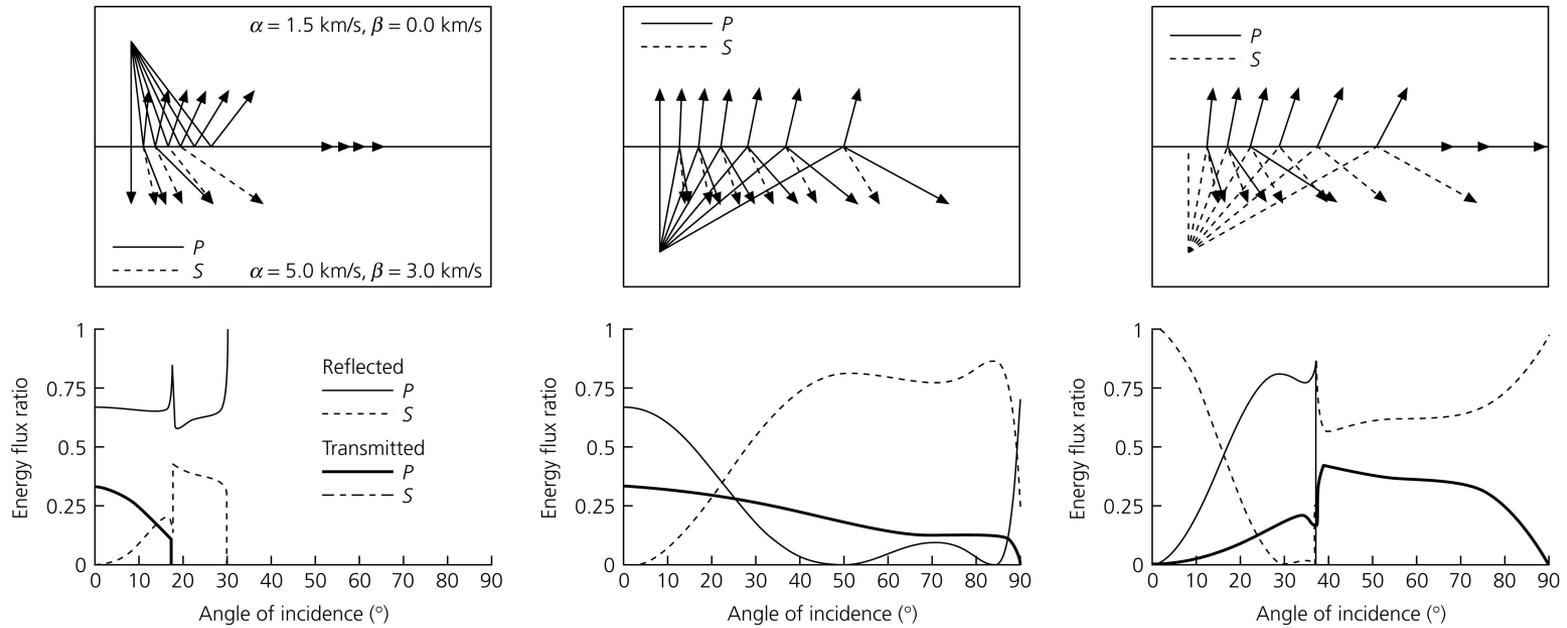


Offset = 150 m



Ondes P-SV: interface solide-liquide

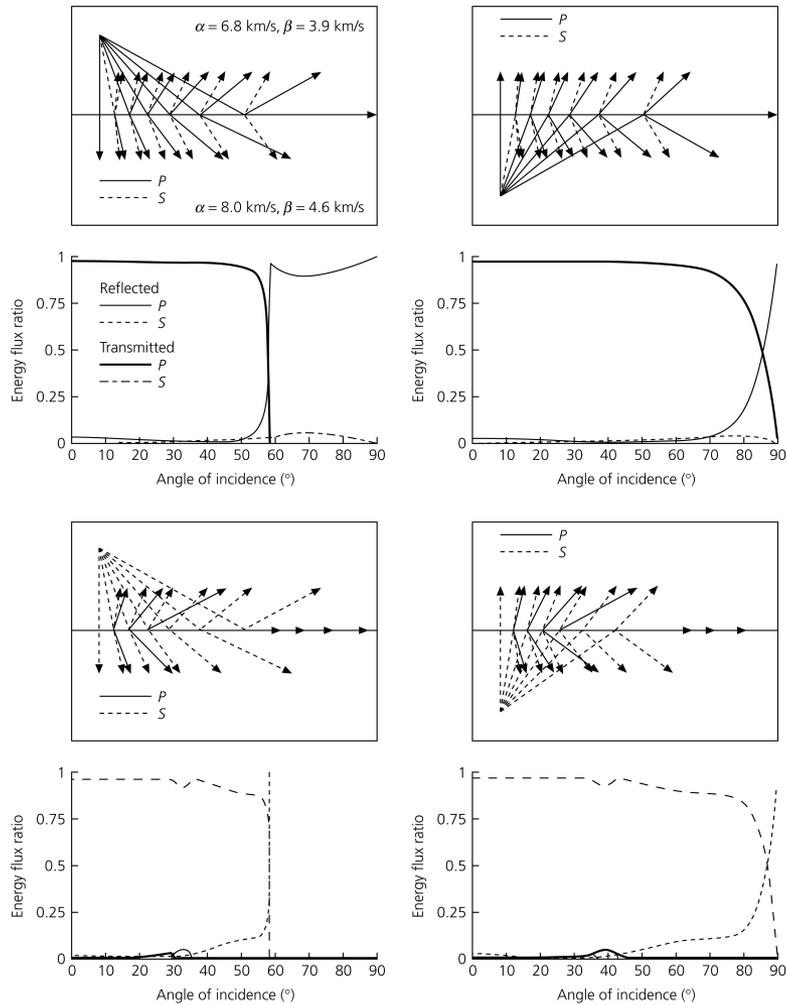
Figure 2.6-12: Ray paths and energy ratios for waves at an ocean-crust boundary.



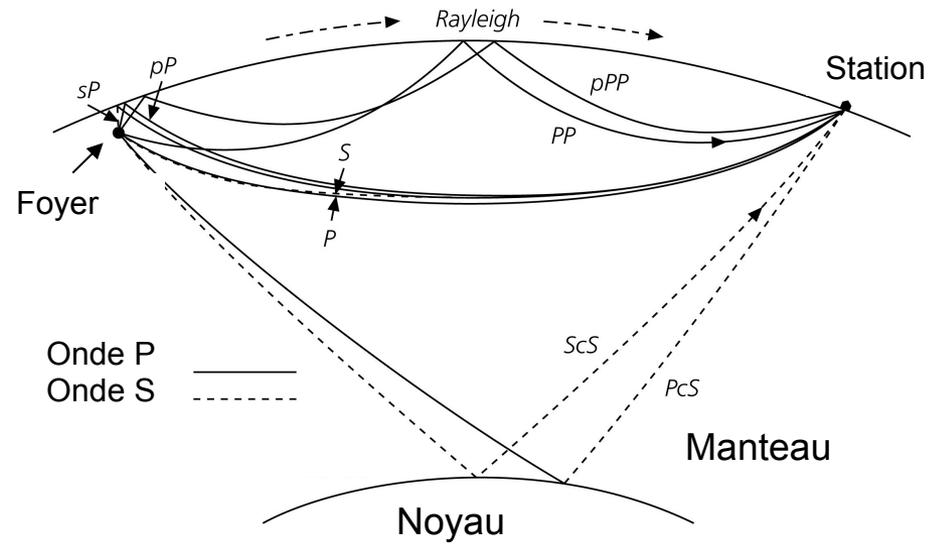
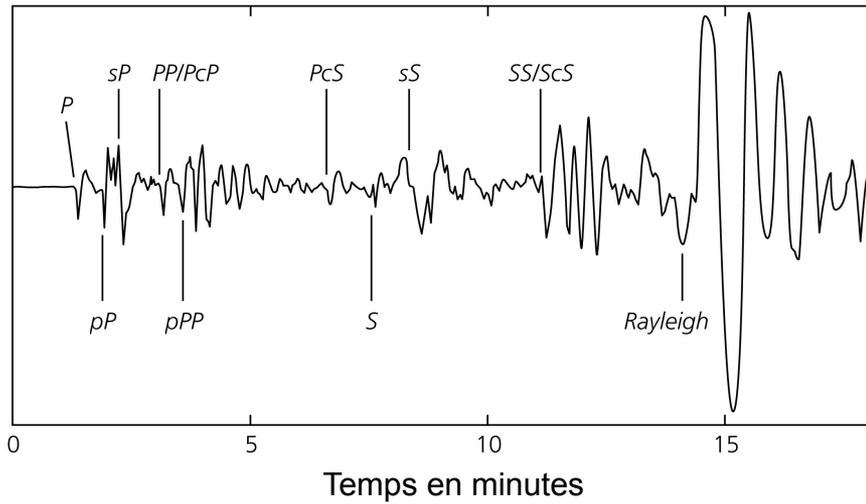
Figures de: Stein and Wysession

Ondes P-SV: interface solide-solide

Figure 2.6-11: Ray paths and energy ratios for waves at a crust-mantle interface.

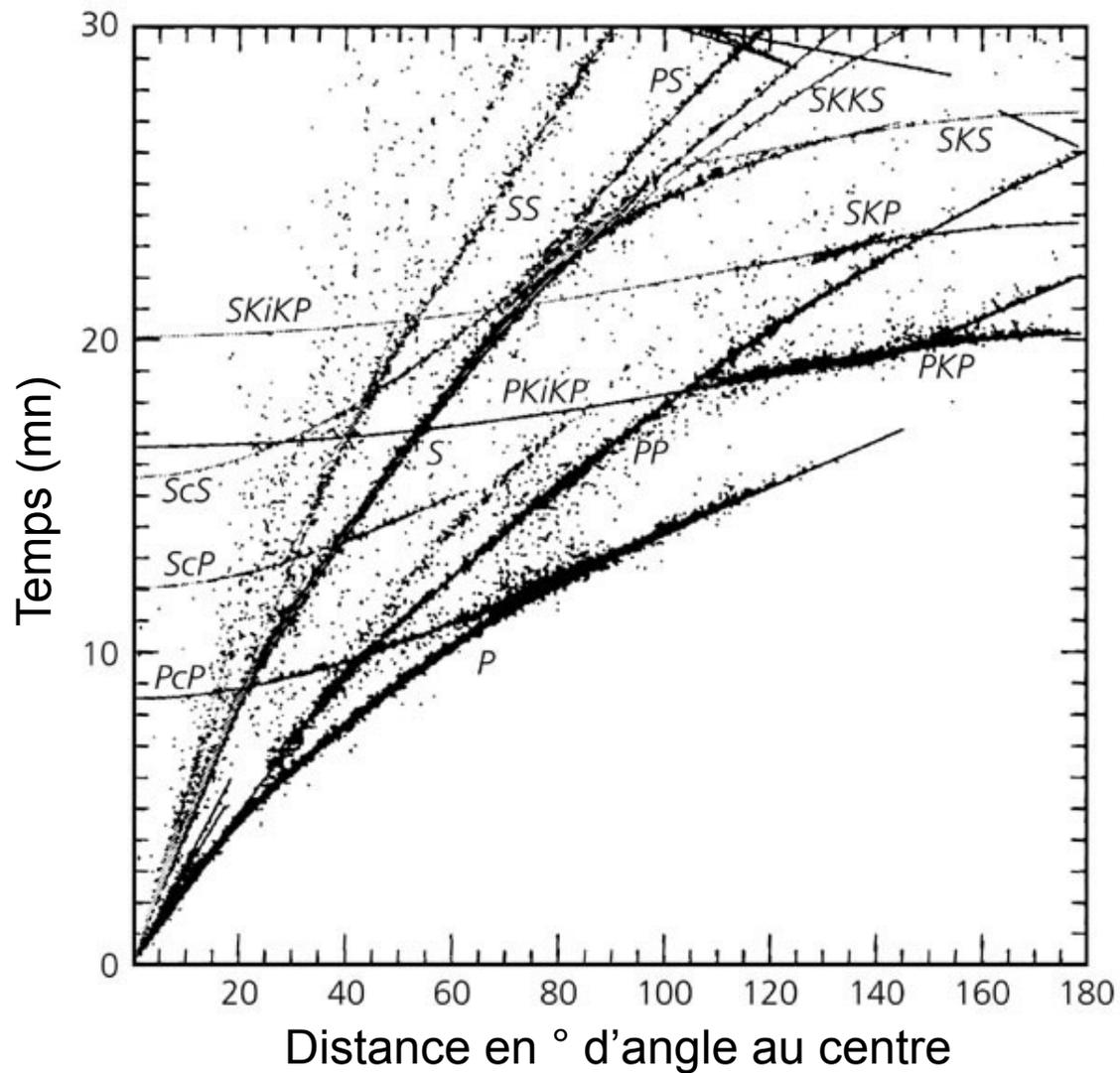


Figures de: Stein and Wysession



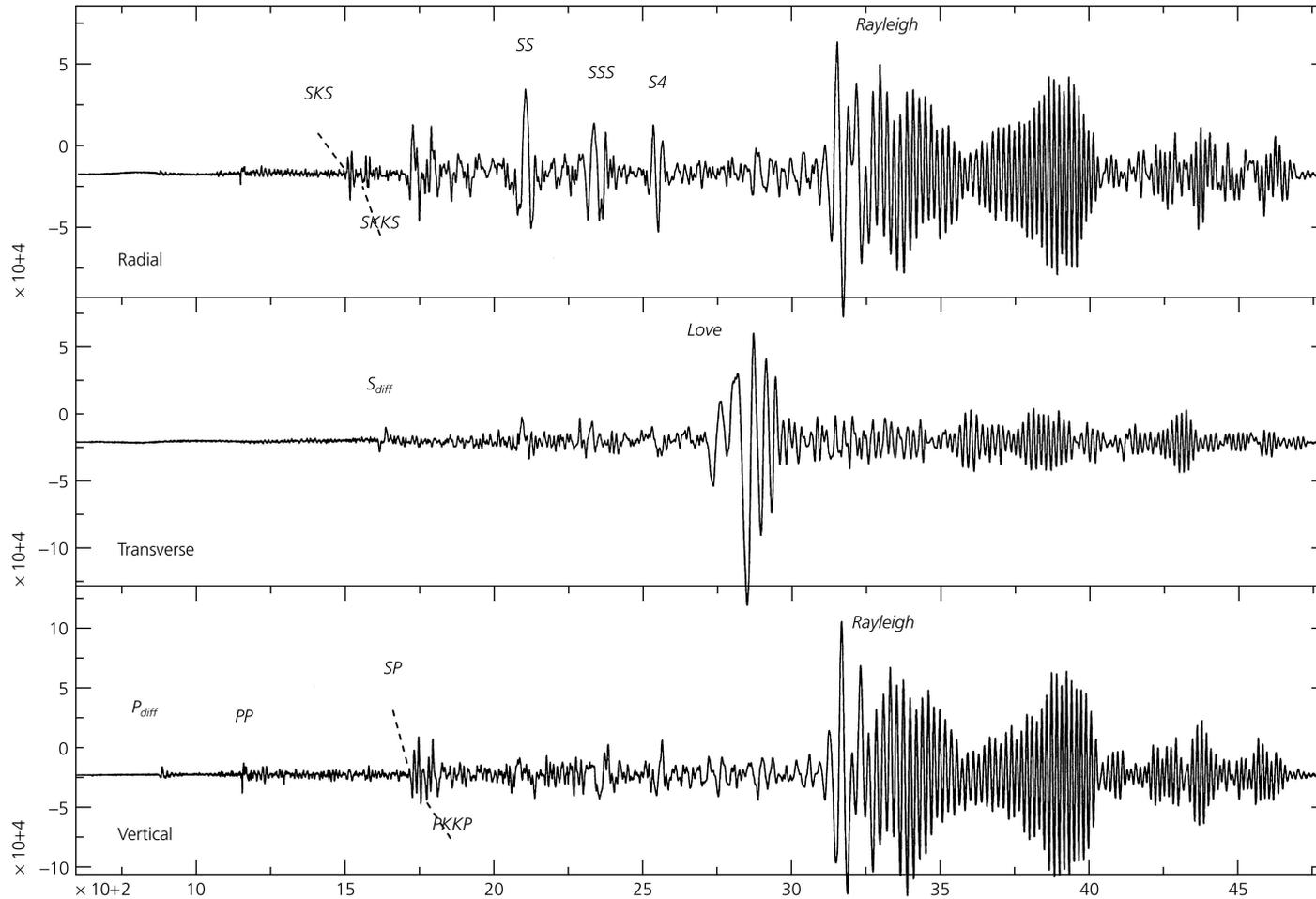
distance=4500km

Pointés des temps d'arrivée des ondes de volume

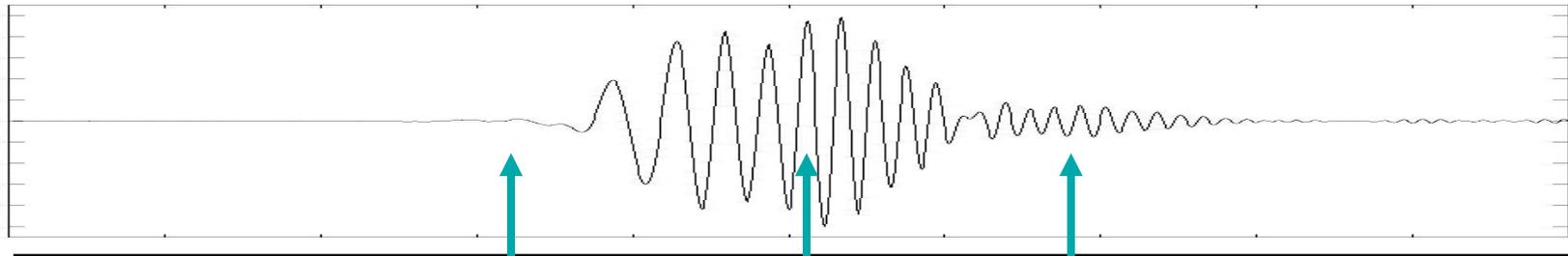


Ondes de surface: observations

Figure 2.7-1: Seismograms recorded at a distance of 110°, showing surface waves.



Figures de: Stein and Wyssession



1000 s

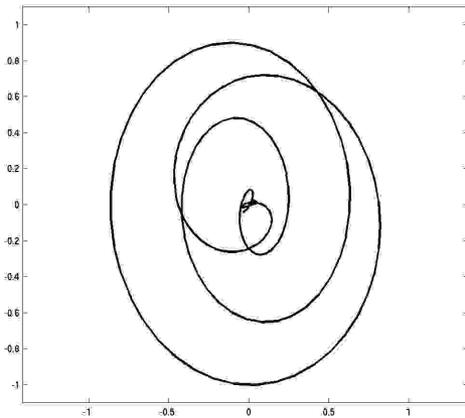
T=80s
(150 km)

T=25s
(30 km)

Coda

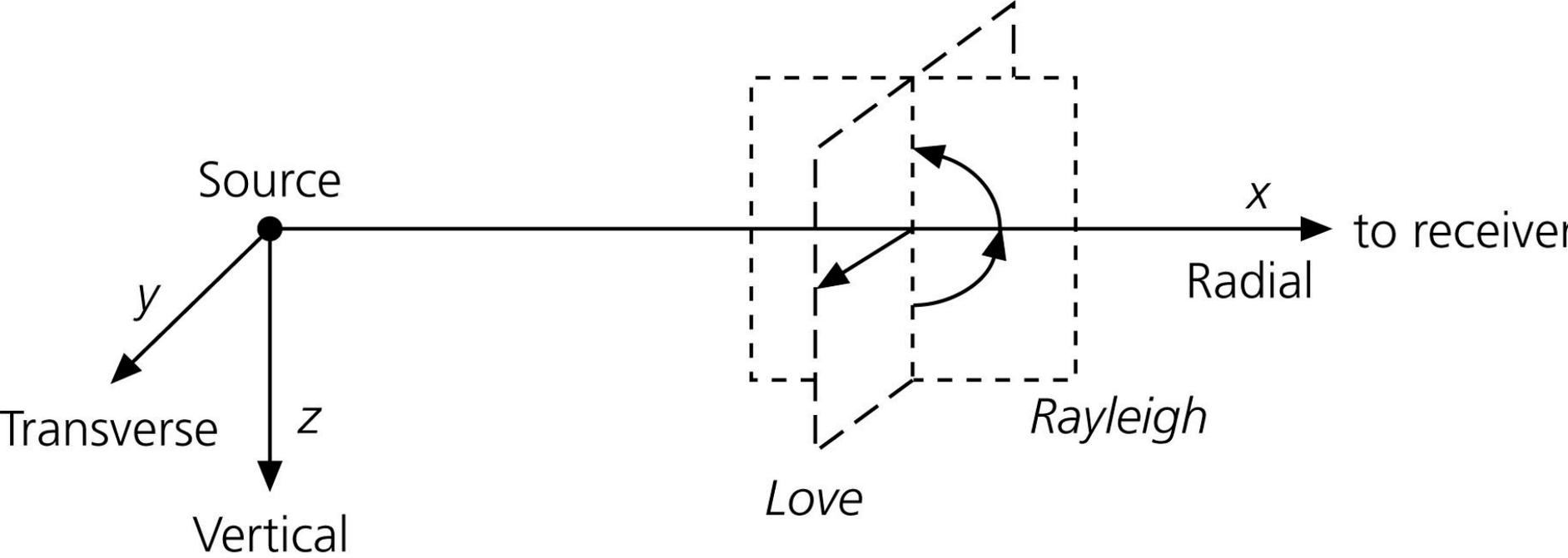
U_r

U_z



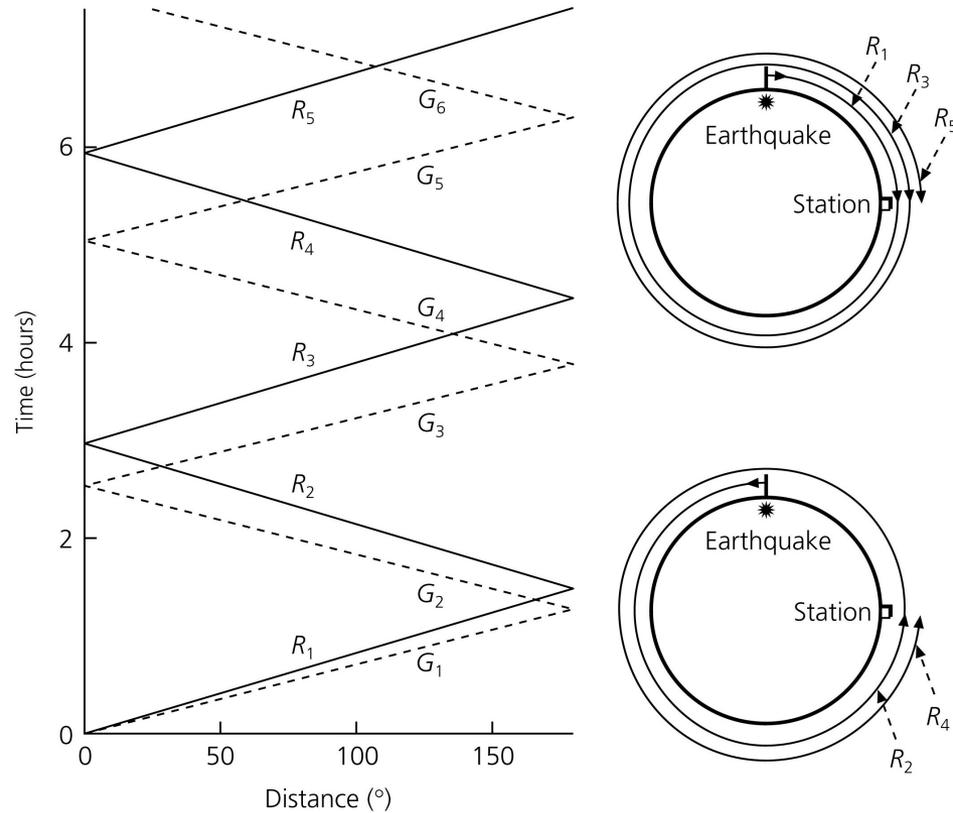
Rayleigh: elliptic polarisation

Figure 2.7-2: Geometry for Love and Rayleigh wave motions.



Ondes de surface: observations

Figure 2.7-4: Six-hour stacked IDA record section.



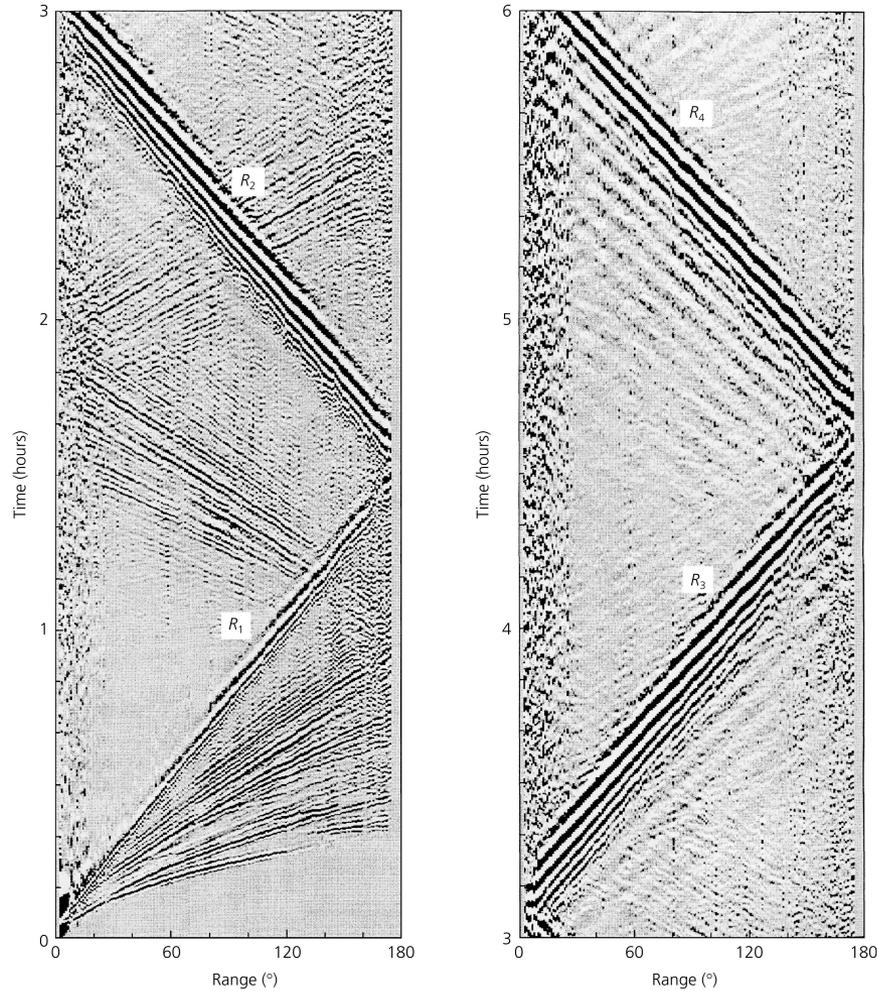
Figures de: Stein and Wyession

TUE415

42

Ondes de surface: observations

Figure 2.7-4: Six-hour stacked IDA record section.



Figures de: Stein and Wyession

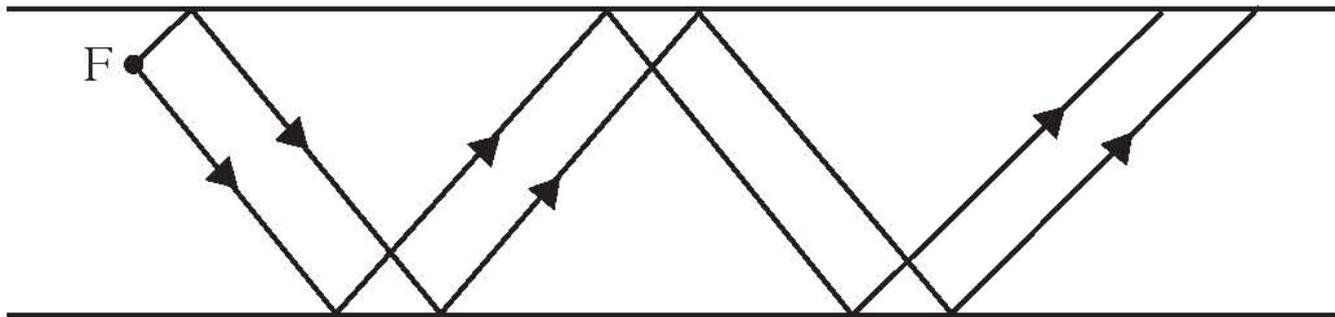
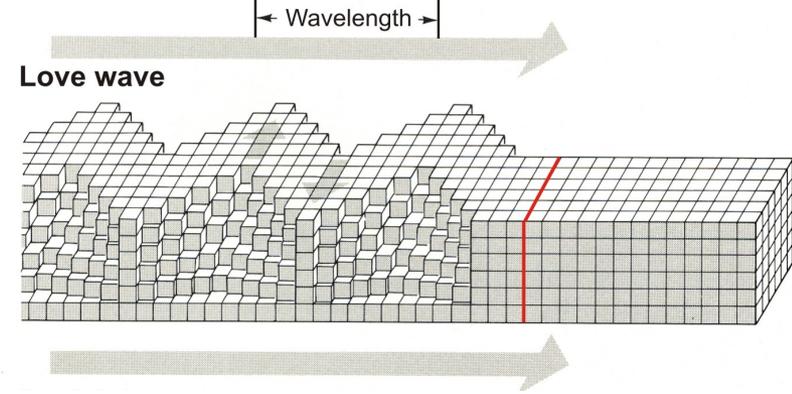
TUE415

LE CAS DES ONDES DE LOVE :

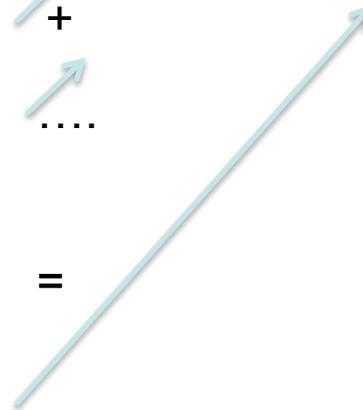
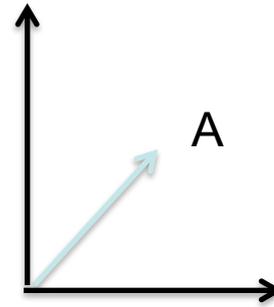
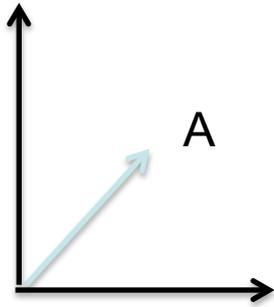
Il s'agit du cas le plus simple d'onde de surface qui existe pour des ondes SH dans un milieu consistant en 1 couche sur un demi-espace. Elles existent dans des cas plus compliqués . Ce sont des ondes guidées : interférences entre réflexions totales.

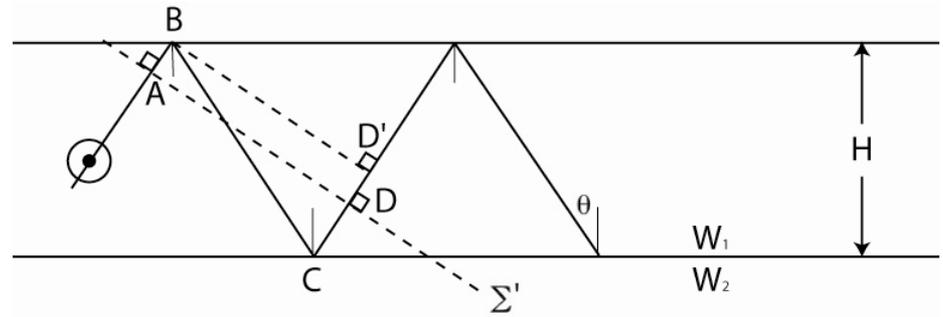
Pour qu'il y ait interférence constructive, il nous faut écrire une condition sur la phase entre l'onde "montante" et "montante" après réflexions.

On considère le cas $\theta > \theta_c = \arcsin \frac{W_1}{W_2}$ (réflexions totales).



Interférences constructives entre multiples (rappel corde et tuyau d'orgue 1D)





Pour avoir interférence constructive :

$$\delta\varphi = \varphi_D - \varphi_A = 2 n \pi$$

$$\delta\varphi = \delta\varphi_L + \delta\varphi_B + \delta\varphi_C$$

C $\delta\varphi_L$: parcours $\delta\varphi_B$ = réflexion surface libre $\delta\varphi_C$ = réflexion en

$$\delta\varphi_L = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = \frac{2\pi}{T} \frac{ABCD}{W_1}$$

$$ABCD = AB + BC + CD = DD' + BC + CD = BC + CD'$$

$$BC = H / \cos \theta \quad CD' = BC \cos 2\theta = H \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$$

$$\rightarrow ABCD = \frac{H}{\cos \theta} (1 + \cos 2\theta) = 2H \cos \theta$$

$$\delta\varphi_L = \frac{2\pi}{W_1 T} \cdot 2H \cos \theta$$

Relation entre θ , C et ω

On obtient une relation générale en prenant la tan de cette expression :

$$\tan(n\pi + \varepsilon(\theta)) = \tan\left(\frac{2\pi H}{W_1 T} \cos \theta\right)$$

$$\tan(\varepsilon(\theta)) = \tan\left(\frac{2\pi H}{W_1 T} \cos \theta\right)$$

relation valable pour tous les n .

$$\text{on pose } \sigma_1 = \sqrt{\frac{C^2}{W_1^2} - 1} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sqrt{1 - \frac{C^2}{W_2^2}}$$

$$\cos \theta = \left(1 - \sin^2 \theta\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{W_1^2}{C^2}\right)^{1/2} = \frac{W_1}{C} \sqrt{\frac{C^2}{W_1^2} - 1} = \frac{W_1}{C} \sigma_1$$

$$\frac{\mu_2 \sigma_2}{\mu_1 \sigma_1} = \tan \frac{2\pi H}{CT} \sigma_1 = \tan KH \sigma_1$$

où $K = \frac{2\pi}{CT} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde de l'onde de surface.

$$\tan KH \sigma_1 = \frac{\mu_2 \sigma_2}{\mu_1 \sigma_1}$$

équation de dispersion reliant C et T .

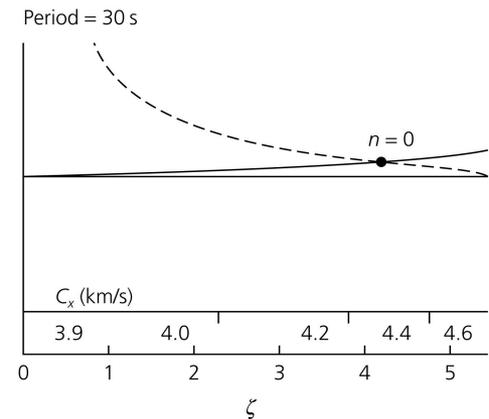
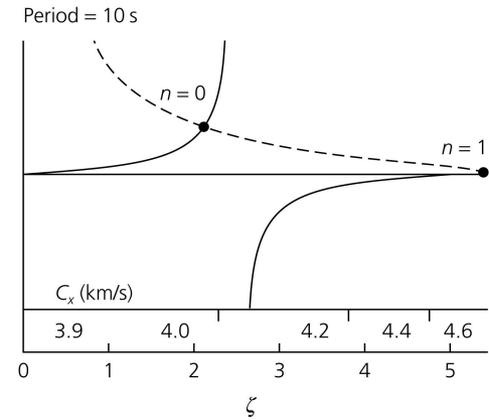
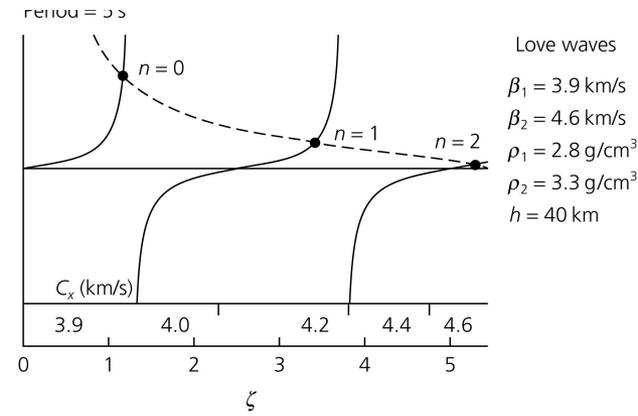
* n qui intervenait dans la condition d'interférence est appelé le rang de l'harmonique ou du mode.

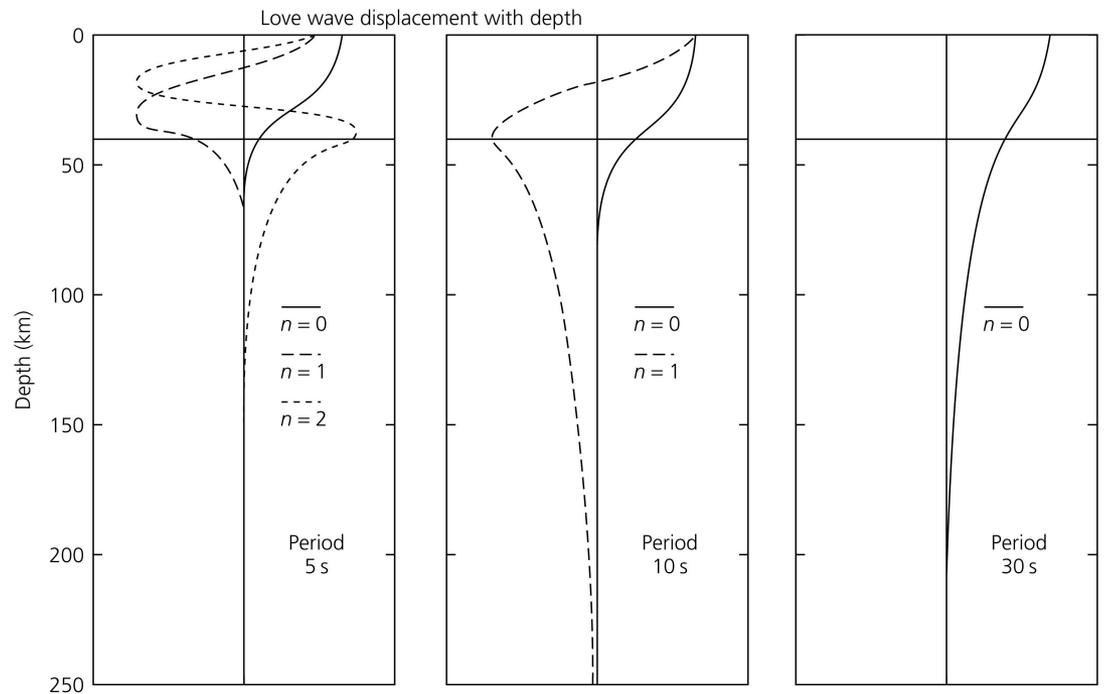
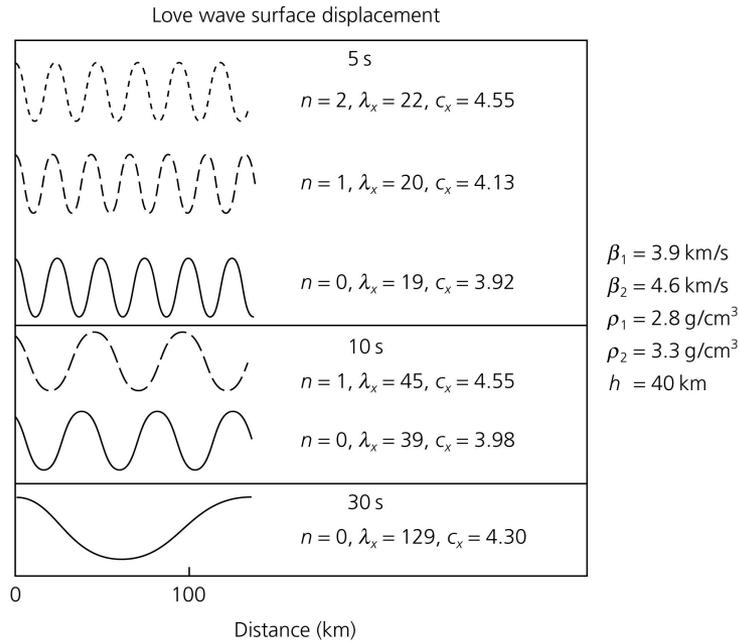
→ n = nbre de noeuds de l'onde stationnaire en z .

$$\mu\left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} - \mu'\left(\frac{c^2}{\beta'^2} - 1\right)^{1/2} \tan\left(kh\left(\frac{c^2}{\beta'^2} - 1\right)^{1/2}\right) = 0$$

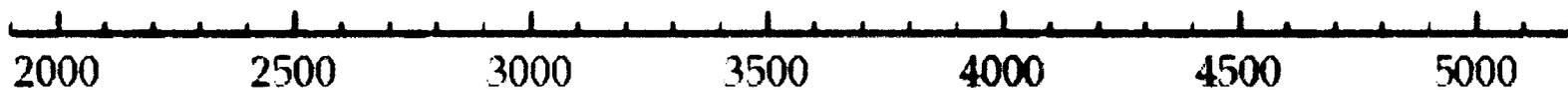
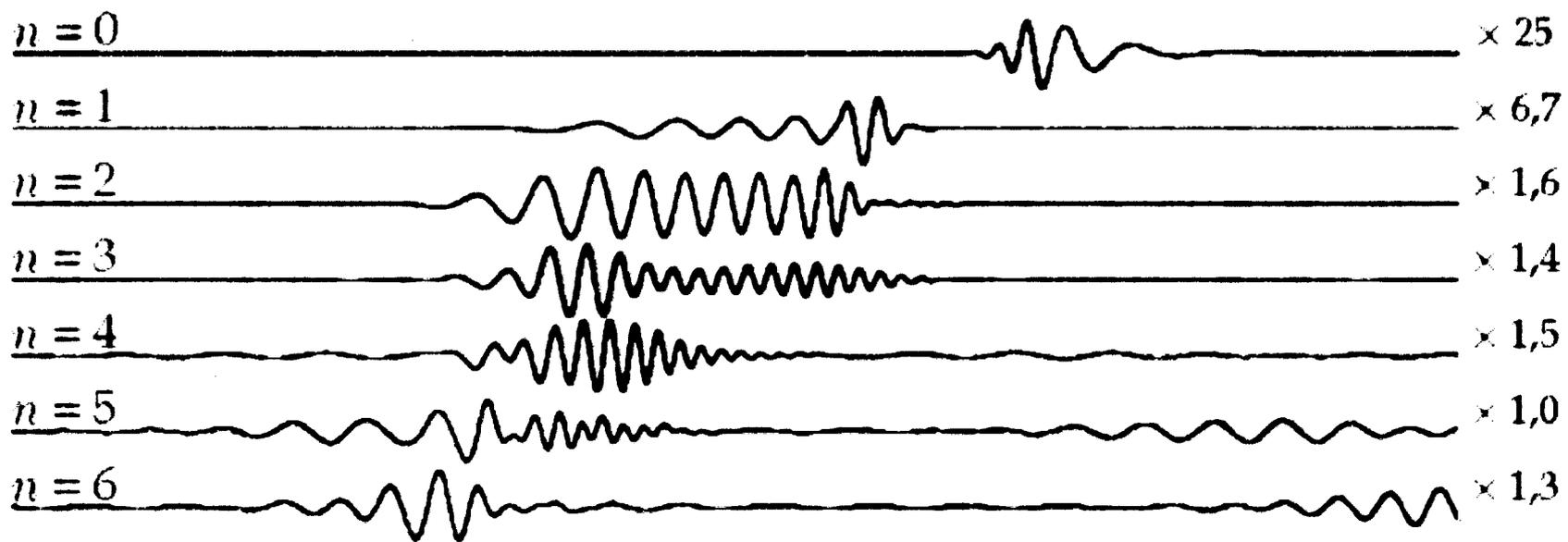
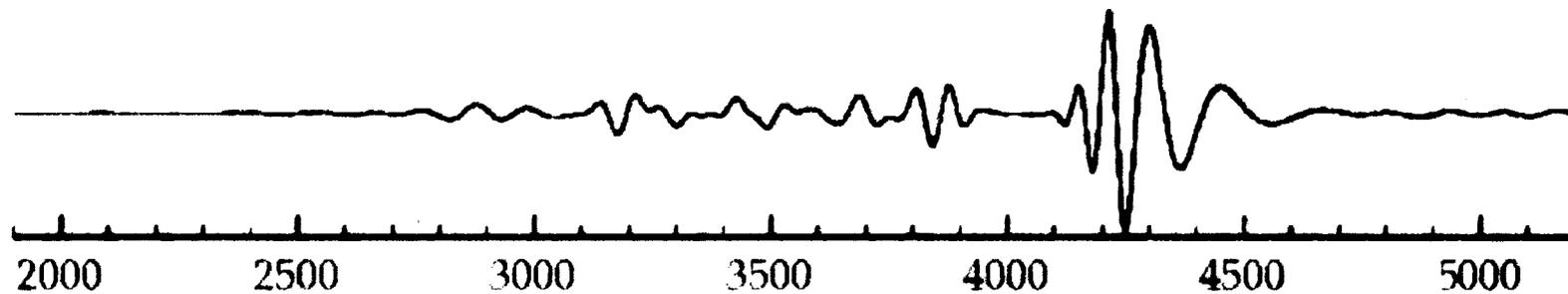
$$\xi = \left(\frac{h}{c}\right)\left(\frac{c^2}{\beta'^2} - 1\right)^{1/2}$$

$$\tan(\omega\xi) = \left(\frac{\mu\left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}{\mu'}\right)\left(\frac{h}{c\xi}\right)$$





La dispersion est le résultat de la pénétration des ondes dépend de la période.



temps (s)

Considérons la somme de 2 ondes harmoniques
de fréquences proches:

$$u(x, t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

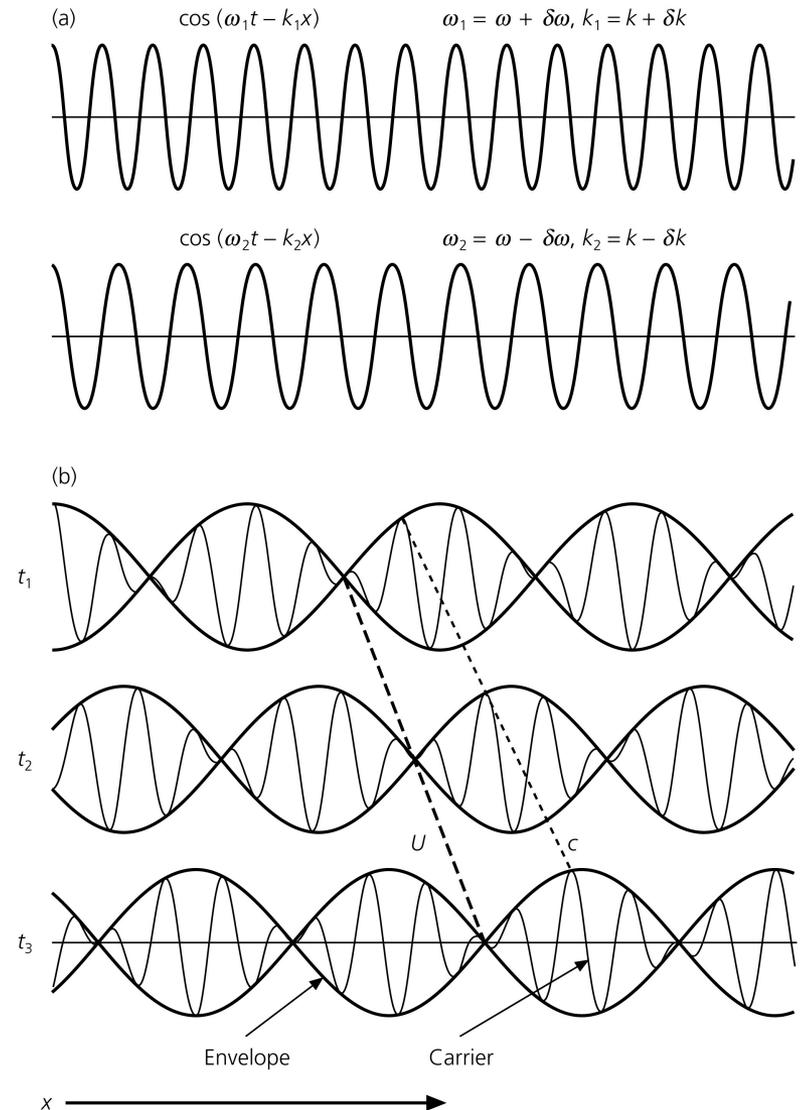
$$\omega_1 = \omega + \delta\omega \quad \omega_2 = \omega - \delta\omega \quad \omega \gg \delta\omega$$

$$k_1 = k + \delta k \quad k_2 = k - \delta k \quad k \gg \delta k$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \cos(\omega t + \delta\omega t - kx - \delta kx) + \\ &\cos(\omega t - \delta\omega t - kx + \delta kx) \\ &= 2\cos(\omega t - kx)\cos(\delta\omega t - \delta kx) \end{aligned}$$

Les pics se déplacent à $c = \omega/k$

L'enveloppe se déplace à $U = \delta\omega/\delta k$



To find the group velocity of energy propagation in the angular frequency band between $\omega_0 - \Delta\omega$ and $\omega_0 + \Delta\omega$, first approximate the wavenumber $k(\omega)$ by the first term of a Taylor series about ω_0 :

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

This gives:
$$u(x, t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A(\omega) \exp \left[i \left(\omega t - k(\omega_0)x - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)x + \phi_i(\omega) \right) \right] d\omega$$

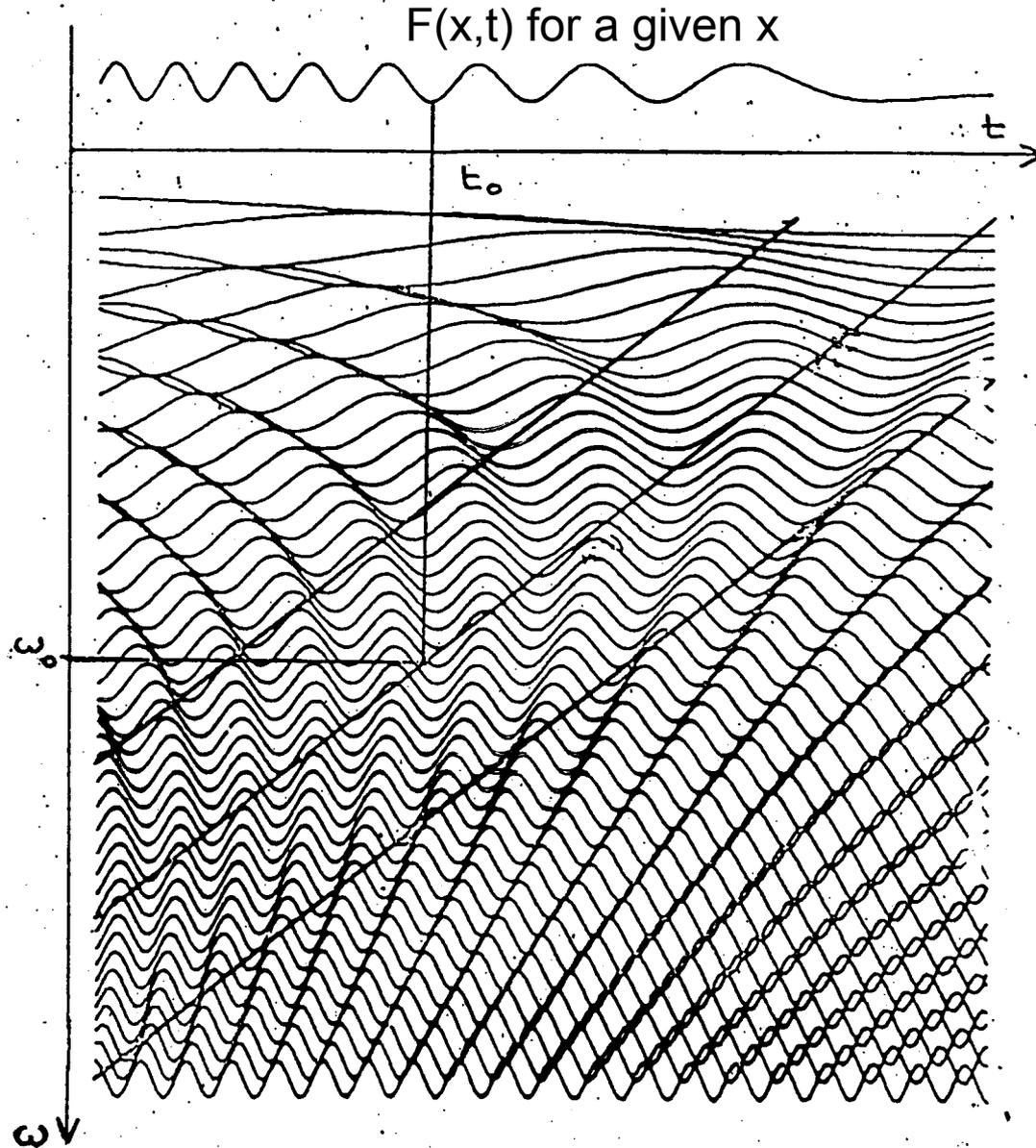
$$u(x, t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A(\omega) \exp \left[i \left((\omega - \omega_0) \left(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x \right) + (\omega_0 t - k(\omega_0)x) + \phi_i(\omega) \right) \right] d\omega$$

Compare to the simple situation of two cosine waves:

$$u(x, t) = 2 \cos(\omega t - kx) \cos(\delta\omega t - \delta kx)$$

Similar to the cosine waves, the group velocity is defined as
$$U(\omega) = \frac{d\omega}{dk}$$

Stationnary phase

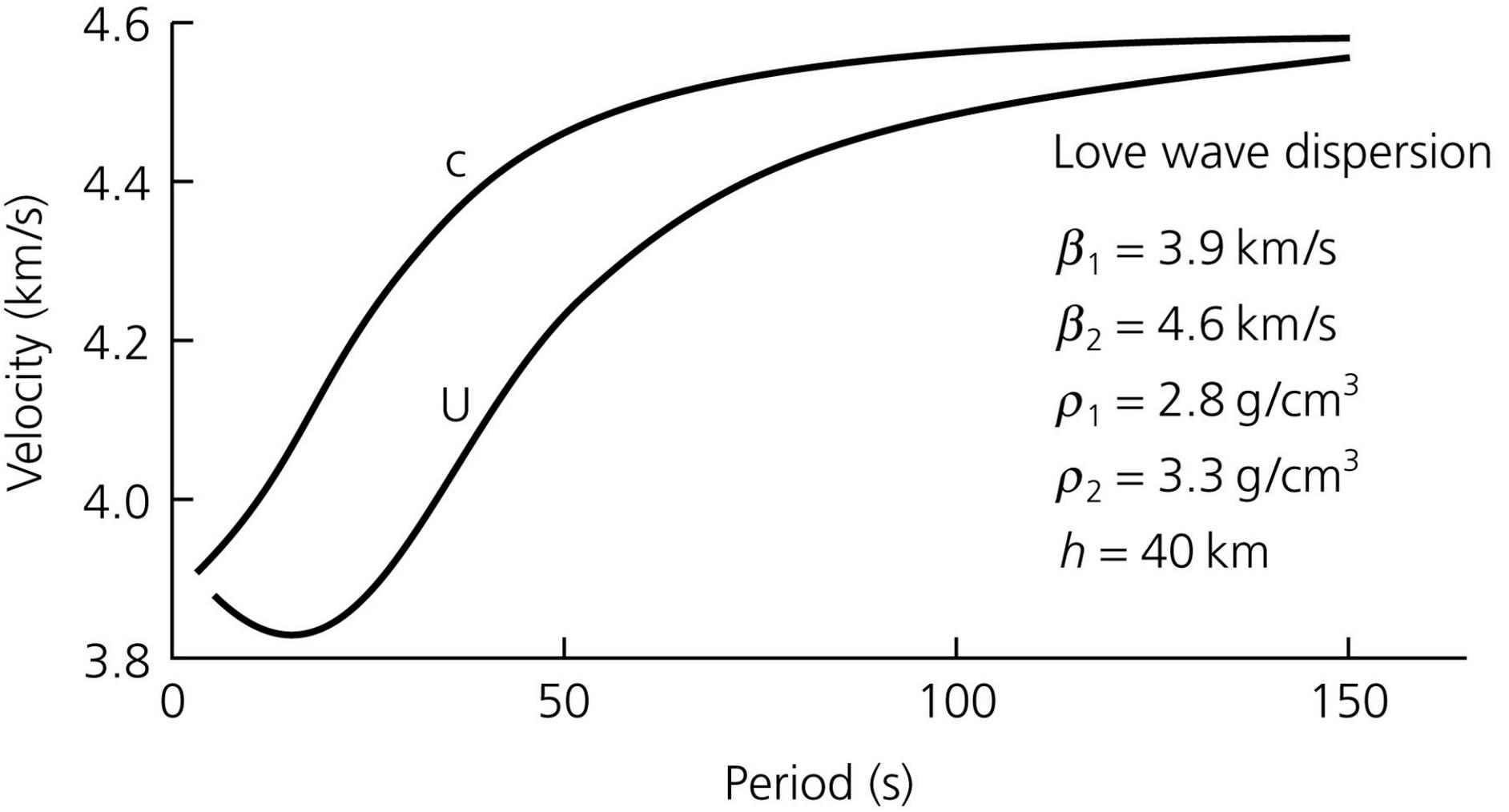


$$\frac{\partial(\omega t - kx)}{\partial \omega} = 0$$

$$t - \frac{\partial k}{\partial \omega} x = 0$$

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Figure 2.8-2: Fundamental mode Love wave group and phase velocities.



$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(ck)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

