

## Chapitre 6

# Couplage magnétohydraulique : modélisation de la dynamo-cinématique

### 6.1. Introduction

#### 6.1.1. Généralités

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la naissance d'une instabilité électromagnétique produite par le mouvement d'un fluide conducteur de l'électricité. Prenons un champ magnétique initial non nul. Considérons un écoulement permanent et supposons que l'on puisse régler l'intensité de l'écoulement sans changer sa géométrie. On constate que le champ magnétique est déformé par l'écoulement. Supposons que l'on supprime ensuite brusquement la source initiale de champ magnétique, alors deux cas sont possibles :

– soit l'intensité magnétique s'éteint au cours du temps. On parle de diffusion magnétique ;

– soit l'intensité magnétique ne décroît pas au cours du temps. Nous sommes alors en présence d'une instabilité dynamo<sup>1</sup>.

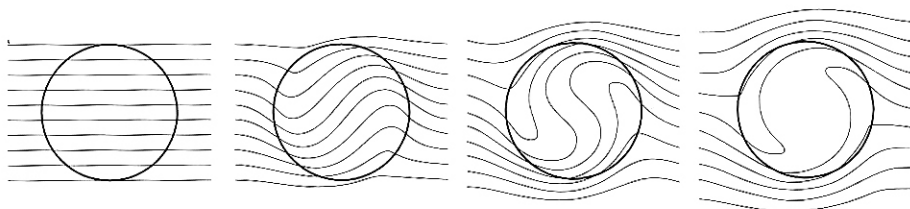
Prenons le cas, par exemple, de la déformation d'un champ uniforme par un fluide en rotation. Pour simplifier le problème, l'écoulement sera assimilé à un cylindre en

---

1. Il peut arriver que l'intensité magnétique croisse uniquement en présence d'un champ initial et qu'une fois ce dernier supprimé, l'intensité magnétique décroisse. On est alors en présence d'un amplificateur magnétique et non pas d'une instabilité dynamo [KOL 61].

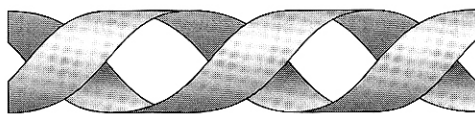
Chapitre rédigé par Franck PLUNIAN et Philippe MASSÉ.

rotation autour de son axe de révolution [PAR 66, WEI 66]. On choisit un champ initial perpendiculaire à l'axe de rotation du cylindre. Le mouvement du cylindre génère une densité de courant électrique. Cette densité de courant induit à son tour un champ magnétique qui s'ajoute au champ initial. Si la vitesse de rotation du cylindre est constante, alors le champ magnétique atteint un état stable. La configuration finale du champ dépend de la vitesse de rotation du cylindre (voir figure 6.1). Pour une rotation élevée (voir figure 6.1 à droite), le champ magnétique est expulsé vers la périphérie du cylindre. Si à un instant donné on supprime le champ magnétique initial alors la géométrie du champ déformé persiste, mais son intensité s'éteint au cours du temps. Le mouvement de rotation solide n'est donc pas une dynamo.



**Figure 6.1.** Lignes de champ magnétique déformées par un cylindre en rotation (sens trigonométrique). De gauche à droite, la rotation est croissante

Considérons maintenant le mouvement précédent auquel on ajoute une composante selon la direction de l'axe du cylindre (mouvement de vissage). La géométrie du champ magnétique s'organise alors selon une double hélice (voir figure 6.2). Au-delà d'un seuil de vitesse, l'intensité magnétique croît au cours du temps, cela même en supprimant la source initiale de champ. Le mouvement de vissage est donc une dynamo.



**Figure 6.2.** Répartition de l'énergie magnétique générée par un mouvement de vissage [PLU 96]

Pour savoir si un écoulement est une dynamo ou pas, il n'existe pas de règle générale, hormis quelques théorèmes anti-dynamo [HID 79, MOF 78, PRO 79] permettant d'exclure des écoulements trop simples (par exemple, un écoulement 2D). Chaque écoulement doit donc faire l'objet d'une étude particulière.

Bien entendu, il est impossible, en réalité, de régler l'intensité de l'écoulement sans changer sa géométrie. En effet, à partir d'une certaine vitesse, la géométrie de l'écoulement se morcelle en structures plus petites, la taille de ces structures, leur répartition et leur comportement évoluant de façon non déterministe (écoulement turbulent). Par ailleurs, même en supposant que l'écoulement soit connu et permanent, l'intensité magnétique dans le cas d'une instabilité dynamo ne peut pas croître indéfiniment (d'après le premier principe de la thermodynamique). En réalité, la croissance magnétique est accompagnée de la rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement par l'intermédiaire des forces de Laplace. Ainsi, conformément à la loi de Lenz, la croissance du champ s'oppose au mouvement du fluide qui lui a donné naissance. La géométrie de l'écoulement est donc, en principe, modifiée par l'instabilité dynamo. Cependant, si l'on s'intéresse à l'apparition de l'instabilité dynamo (taux de croissance nul) alors l'hypothèse d'une géométrie d'écoulement déterminée *a priori* est pertinente. Par ailleurs, même en présence d'un fluide fortement turbulent, on peut dans certains cas ne considérer que l'écoulement moyen et montrer *a posteriori* que les fluctuations turbulentes n'influencent pas significativement les conditions d'apparition de l'effet dynamo [KRA 80]. Enfin, nous avons vu que l'apparition de l'instabilité dynamo nécessite un écoulement suffisamment vigoureux (seuil de vitesse). En réalité, une faible vitesse d'écoulement peut être compensée par la conductivité électrique du fluide, sa perméabilité magnétique ou encore par l'échelle caractéristique de l'écoulement. Un écoulement dynamo peut donc être, en théorie, laminaire ou faiblement turbulent. Quand on considère connue la géométrie de l'écoulement, le problème est dit cinématique, par opposition au problème dynamique qui nécessite d'étudier non seulement l'évolution du champ magnétique mais aussi celle de l'écoulement. Dans ce chapitre, nous nous limitons à l'étude du problème cinématique.

La théorie cinématique de l'effet dynamo [MOF 78, ROB 92] permet d'appréhender la physique de génération du champ magnétique. Des classes de dynamo ont été mises à jour : dynamos lente ou rapide, dynamos à séparation d'échelles (théorie du champ moyen [KRA 80]) ou non. Des mécanismes dynamo ont été identifiés : étirement, torsion, plissement, cisaillement [CHI 95], effet alpha, etc. Nous verrons en fin de chapitre quelques exemples de dynamos classiques et leurs mécanismes correspondants.

L'étude de l'instabilité dynamo est née historiquement de l'intérêt manifesté pour l'origine du champ magnétique dans le soleil. Elle a été étendue à la plupart des objets astrophysiques (planètes, étoiles, galaxies, etc.) [RAD 95, WEI 94]. En effet, bien que le fluide contenu dans ces objets soit animé d'un mouvement relativement lent, les échelles caractéristiques de l'écoulement sont tellement considérables que l'effet dynamo est obtenu presque systématiquement. Inversement, dans les expériences menées en laboratoire, on tente de compenser la dimension caractéristique relativement petite de l'écoulement par une vitesse importante. C'est

d'ailleurs pour cette raison que l'effet dynamo est difficile à reproduire en laboratoire et n'a, à ce jour, aucune application pratique ou industrielle.

La majeure partie du champ magnétique solaire est en fait indétectable car enfouie dans le bas de la zone convective. Cependant, celui-ci se manifeste par des excursions hors de la zone convective en entraînant avec lui du plasma. Ces éruptions forment des arches à la surface du soleil (visibles à l'œil nu pendant une éclipse ou avec des instruments optiques adaptés). Elles sont à l'origine des taches solaires. Ces taches migrent vers l'équateur avec un cycle de 22 ans. Les modèles de dynamo solaire tentent de reproduire les caractéristiques de ce cycle (diagramme papillon) [PRI 82, SCH 92]. A une échelle de temps plus grande, l'apparition des taches n'est plus cyclique mais de nature chaotique.

L'effet dynamo est également à l'origine du champ magnétique terrestre. La nature non linéaire du phénomène est à l'origine des renversements chaotiques du dipôle magnétique que les paléo-magnéticiens ont mis en évidence en analysant les laves refroidies ou les couches sédimentaires sous-marines [COX 69, MER 95, VAL 93]. Le fluide conducteur nécessaire à la dynamo est contenu dans le noyau liquide de la Terre. Son mouvement est d'origine thermique. En effet, le noyau liquide se solidifie en son centre et forme une graine solide. Cette solidification est accompagnée par un dégagement de chaleur donnant lieu à un régime de convection naturelle du noyau liquide.

L'instabilité dynamo fait également l'objet de recherches théoriques [PLU 96, PLU 98, PLU 99] et expérimentales [ALE 00] dans les circuits de refroidissement à sodium liquides des réacteurs à neutrons rapides (RNR). En effet, le volume important de sodium liquide (conducteur de l'électricité) contenu dans les circuits primaire et secondaire, une géométrie d'écoulement appropriée et une forte vitesse font des RNR des candidats potentiels à une instabilité dynamo. Par ailleurs, si l'acier utilisé pour la réalisation des assemblages dans lesquels circule le sodium a une forte perméabilité magnétique (acier ferromagnétique), alors l'instabilité dynamo est favorisée [PLU 95, SOT 99].

Récemment, plusieurs équipes de recherche ont entrepris de reproduire un effet dynamo en laboratoire. Deux expériences (également en sodium liquide) ont été à ce jour couronnées de succès [BUS 96, GAI 00, GAI 01, RAD 98, STI 01]. Ces expériences sont de type semi-dynamique. En effet, le forçage utilisé permet de produire une géométrie d'écoulement moyen quasi indépendante de l'intensité du forçage d'une part et de l'intensité magnétique d'autre part (contexte cinématique). Ainsi, à partir d'un seuil de vitesse, l'énergie magnétique croît exponentiellement. Après un certain temps, elle se stabilise à une valeur dépendant de l'intensité du forçage. Cet équilibre résulte de la rétroaction du champ magnétique sur l'intensité de l'écoulement. L'écoulement moyen est donc freiné mais sa géométrie n'est pas

affectée comme elle le serait dans un contexte dynamique complet. Une deuxième génération d'expériences, de type dynamique, est en cours d'étude.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation de l'effet dynamo cinématique par la méthode des éléments finis. Cela nous permet de déterminer les conditions d'apparition de l'instabilité dynamo pour un écoulement donné et de comprendre les mécanismes physiques menant à cette instabilité. Les formulations que nous présentons ont été testées et validées<sup>2</sup>. Elles présentent l'avantage d'être le moins contraignantes possible (par exemple, au niveau des sauts de propriétés électromagnétiques).

### 6.1.2. Les équations de Maxwell et la loi d'Ohm

Les quantités électromagnétiques usuelles (champ magnétique  $H$ , induction magnétique  $B$ , champ électrique  $E$ , densité de courant  $j$ , charge électrique  $q$ ) ont un comportement entièrement décrit par :

– les équations de Maxwell :

$$\nabla \times (H) = j + \frac{\partial (\varepsilon E)}{\partial t} \quad [6.1]$$

$$\nabla \times (E) = - \frac{\partial (B)}{\partial t} \quad [6.2]$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad [6.3]$$

$$\nabla \cdot \varepsilon E = q \quad [6.4]$$

$$H = \frac{B}{\mu} \quad [6.5]$$

– la loi d'Ohm (exprimée pour un fluide conducteur de vitesse  $V$ ) :

$$j = \sigma (E + V \times B) \quad [6.6]$$

$\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  et  $q$  étant respectivement la perméabilité et permittivité magnétique, la conductivité et la charge électrique.

---

2. Avec le logiciel Flux-Expert [MAS 84].

Dans le cas des métaux liquides, les courants de déplacement  $\partial(\varepsilon E)/\partial t$  sont négligeables par rapport à  $j$  dans [6.1]. L'équation [6.1] est alors réduite à :

$$\nabla \times (H) = j \quad [6.7]$$

Dans les zones non conductrices ( $\sigma=0$ ), comme l'air par exemple, [6.6] implique qu'il n'y a pas de courant électrique  $j$ . On déduit alors de [6.7] que  $H$  dérive d'un gradient. Dans les zones isolantes, on définit donc le potentiel magnétique  $\varphi$  par :

$$H = \nabla \varphi \quad [6.8]$$

Les conditions aux interfaces entre deux sous-domaines sont déduites des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm.

$$[E \times n] = 0 ; [\sigma(E + V \times B) \cdot n] = 0 ; [B \cdot n] = 0 ; [H \times n] = 0 \quad [6.9]$$

où  $n$  est défini comme le vecteur normal dirigé vers l'extérieur de l'interface ( $I$ ) ou de la frontière du domaine d'intégration ( $J$ ).

### 6.1.3. L'équation de l'induction

En combinant les équations [6.2], [6.5], [6.6] et [6.7] on obtient l'équation de l'induction :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (V \times B) - \nabla \times \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \frac{B}{\mu} \right) \quad [6.10]$$

On remarque que [6.10] entraîne  $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot B) = 0$ . La relation [6.3] est donc une condition initiale en temps que doit vérifier  $B$ .

En effectuant le produit scalaire de [6.10] par  $B/\mu$ , et en intégrant sur tout l'espace de modélisation, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{(\Omega)} \frac{B^2}{2\mu} d\Omega + \iint_{(\Gamma)} (E \times H) \cdot ndS + \iiint_{(\Omega)} (j \times B) \cdot V d\Omega + \iiint_{(\Omega)} \frac{j^2}{\sigma} d\Omega = 0 \quad [6.11]$$

Le flux du vecteur de Poynting (2<sup>e</sup> terme) sur une surface disposée à l'infini est nul pour la dynamo. L'équation [6.11] traduit donc que la production d'énergie

magnétique (1<sup>er</sup> terme) est possible à condition que le travail des forces de Laplace (3<sup>e</sup> terme) soit supérieur à la dissipation par effet Joule (4<sup>e</sup> terme). Cette condition sur les forces de Laplace nécessite un champ de vitesse de géométrie adéquate et d'intensité suffisamment importante. Une des difficultés de la reproduction expérimentale est de trouver la façon de générer un écoulement dont la géométrie produise un effet dynamo pour une vitesse raisonnable.

#### 6.1.4. Equation sans dimension

Comme souvent en physique, il est intéressant de manipuler des équations sans dimension lorsque cela est possible. Dans le cas où  $\sigma$  et  $\mu$  sont constants dans l'écoulement, l'équation de l'induction s'écrit :

$$\frac{\partial B}{\partial t'} = \nabla' \times (V' \times B) - R_m^{-1} \nabla' \times (\nabla' \times B) \quad [6.12]$$

où  $R_m$  est le nombre de Reynolds magnétique, défini par :

$$R_m = \sigma \mu V L \quad [6.13]$$

Les ' désignent des quantités sans dimension,  $V$  et  $L$  des valeurs caractéristiques de vitesse et de dimension de l'écoulement. Par exemple dans le cas de la Terre,  $L$  est le rayon du noyau liquide et  $V$  la vitesse caractéristique de convection naturelle dans le noyau. Pour le soleil,  $L$  est le rayon de la zone convective. Dans le tableau 6.1, quelques ordres de grandeurs menant au calcul du nombre de Reynolds magnétique ( $R_m$ ) sont présentés pour différents objets naturels [ZEL 83], pour un réacteur à neutrons rapides ainsi que pour les deux expériences de dynamo menées l'une à Riga (Lettonie), l'autre à Karlsruhe (Allemagne).

Dans le cas d'un écoulement permanent (indépendant du temps), on démontre que la solution de l'équation de l'induction [6.10] a la forme suivante :

$$B(x, y, z, t) = \text{Re} (B(x, y, z) e^{pt})$$

où  $p$  est un nombre complexe. Les parties réelle et imaginaire de  $p$  sont respectivement le taux d'accroissement et la pulsation de  $B$ . L'effet dynamo

correspond à  $Re(p) \geq 0$ <sup>3</sup>. L'absence de dynamo est caractérisée par  $Re(p) \leq 0$  (diffusion). Le paramètre complexe  $p$  dépend de la géométrie de l'écoulement et de  $R_m$ .

	T K	L m	V m s <sup>-1</sup>	v m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	v <sub>m</sub> m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	R <sub>c</sub>	R <sub>m</sub>
Noyau liquide terrestre	4 10 <sup>3</sup>	35 10 <sup>5</sup>	4 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-6</sup>	3	10 <sup>9</sup>	5 10 <sup>2</sup>
Noyau de Jupiter	10 <sup>4</sup>	5 10 <sup>7</sup>	5 10 <sup>-2</sup>	3 10 <sup>-6</sup>	1	10 <sup>12</sup>	10 <sup>6</sup>
Zone convective du Soleil	10 <sup>3</sup>	2 10 <sup>8</sup>	10 <sup>3</sup>	3 10 <sup>-5</sup>	10 <sup>3</sup>	7 10 <sup>15</sup>	2 10 <sup>8</sup>
Disque d'accrétion autour d'un trou noir							
– région intérieure	2 10 <sup>6</sup>	10 <sup>3</sup>	5 10 <sup>5</sup>	5 10 <sup>2</sup>	1,5 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>8</sup>	3 10 <sup>13</sup>
– région intermédiaire	3 10 <sup>3</sup>	10 <sup>6</sup>	5 10 <sup>3</sup>	3 10 <sup>2</sup>	4 10 <sup>-1</sup>	10 <sup>11</sup>	10 <sup>10</sup>
Milieu interstellaire							
– région HI	10 <sup>2</sup>	3 10 <sup>17</sup>	3 10 <sup>3</sup>	2 10 <sup>15</sup>	5 10 <sup>17</sup>	5 10 <sup>3</sup>	2 10 <sup>4</sup>
– région HII	10 <sup>4</sup>	3 10 <sup>18</sup>	10 <sup>4</sup>	5 10 <sup>15</sup>	3 10 <sup>16</sup>	5 10 <sup>7</sup>	10 <sup>9</sup>
– tunnel	10 <sup>6</sup>	3 10 <sup>18</sup>	10 <sup>4</sup>	3 10 <sup>22</sup>	5 10 <sup>13</sup>	1	6 10 <sup>8</sup>
Disque galactique gazeux	10 <sup>4</sup>	10 <sup>19</sup>	10 <sup>4</sup>	5 10 <sup>13</sup>	10 <sup>17</sup>	2 10 <sup>9</sup>	10 <sup>6</sup>
Univers en expansion	4 10 <sup>3</sup>	4 10 <sup>20</sup>	10 <sup>4</sup>	10 <sup>13</sup>	5 10 <sup>3</sup>	4 10 <sup>11</sup>	10 <sup>21</sup>
Réacteur à neutrons rapides	673	1	5,5	7 10 <sup>-7</sup>	2 10 <sup>-1</sup>	8 10 <sup>6</sup>	27,5
Expériences en laboratoire							
– Riga	423	0,125	13	6 10 <sup>-7</sup>	8 10 <sup>-2</sup>	3 10 <sup>6</sup>	20
– Karlsruhe	398	0,1	5	7 10 <sup>-7</sup>	8 10 <sup>-2</sup>	7 10 <sup>3</sup>	6,25

**Tableau 6.1.** Paramètres typiques des objets naturels, installations industrielles et expérimentales donnant lieu à un effet dynamo

Pour une géométrie d'écoulement donnée, on peut s'intéresser, par exemple, à la valeur minimum de  $R_m$  pour qu'il y ait effet dynamo. Ce nombre de Reynolds magnétique critique ( $R_m^C$ ) correspond à un taux d'accroissement nul ( $Re(p)=0$ ).

Pour une géométrie d'écoulement dynamo donnée, on peut aussi s'intéresser à la limite de  $Re(p)$  quand  $R_m$  tend vers l'infini. On définit ainsi deux classes de dynamo, « lente » ou « rapide », selon que cette limite est nulle ou non [CHI 95]. Cette distinction est pertinente pour de nombreux objets astrophysiques (Soleil, galaxie,

---

3. Dans les expériences de dynamo citées précédemment pour lesquelles l'écoulement moyen était quasi permanent, il a été observé une croissance exponentielle de l'énergie magnétique conformément aux prédictions théoriques.



etc.) pour lesquels  $R_m$  est considérable ( $>10^8$ ) et dont il convient d'identifier des mécanismes de génération compatibles avec une telle valeur de  $R_m$ . Par ailleurs, la plupart des prédictions astrophysiques de dynamo reposent sur la théorie du champ moyen [KRA 80] et supposent implicitement l'existence de dynamo rapide.

La discrétisation selon les coordonnées spatiales de l'équation de l'induction conduit à une équation matricielle du type  $pB = M \cdot B$  où la matrice  $M$  dépend de la méthode de discrétisation utilisée (éléments finis, série de Fourier, différences finies, etc.) ainsi que de la finesse de discrétisation (taille des mailles, nombre de modes de Fourier, etc.). Les valeurs possibles de  $p$  sont ainsi l'ensemble des valeurs propres de  $M$ . Le taux d'accroissement  $p$  significatif est alors la valeur propre dont la partie réelle est la plus grande. C'est elle que l'on calcule par un schéma temporel direct et que l'on mesure physiquement dans une expérience. Dans certains cas, il est cependant intéressant de suivre plusieurs valeurs propres en fonction des paramètres du problème [PLU 99].

## 6.2. Modélisation de l'équation de l'induction par les éléments finis

### 6.2.1. Formulation en potentiel quadri-vecteur ( $A, \phi$ )

#### 6.2.1.1. Définition des potentiels magnétique et scalaire

Les potentiels vecteur (magnétique)  $A$  et scalaire (électrique)  $\phi$  sont définis par :

$$B = \nabla \times A ; \quad [6.14]$$

$$E = -\nabla \phi - \partial A / \partial t \quad [6.15]$$

Toute transformation de type :

$$A' = A + \nabla f ; \quad [6.16]$$

$$\phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t} \quad [6.17]$$

où  $f$  est une fonction scalaire quelconque ne change ni  $E$  ni  $B$ . De façon à assurer l'unicité de la solution en quadri-vecteur ( $A, \phi$ ) il est nécessaire d'imposer une condition de jauge que doit vérifier ( $A, \phi$ ). Les plus courantes sont les jauges de Coulomb et de Lorenz.

6.2.1.2. *Forme forte*

L'équation de l'induction [6.10] peut également être formulée en potentiels vecteur et scalaire  $A$  et  $\phi$  :

$$\nabla \times \left( \frac{\nabla \times A}{\mu} \right) = \sigma \left( -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi + V \times \nabla \times A \right) \quad [6.18]$$

L'équation [6.18] est valable quelque soit  $\sigma$ , contrairement à l'équation [6.12]. Il y a cependant une inconnue de plus que le nombre d'équations à résoudre. Il faut donc résoudre une équation supplémentaire qui, logiquement, pourrait être issue du choix de la jauge que doivent vérifier les potentiels  $A$  et  $\phi$ . Cependant, nous imposerons la jauge de Coulomb :

$$\nabla \cdot A = 0 \quad [6.19]$$

directement dans la forme faible de l'équation [6.18], à l'aide d'une formulation de type moindres carrés [CSE 82]. Cette opération présente l'avantage de symétriser la matrice de diffusion mais l'inconvénient de ne plus assurer la continuité de la composante normale de la densité de courant  $j$  aux interfaces. Pour pallier cet inconvénient, nous choisissons de résoudre l'équation supplémentaire :

$$0 = \nabla \cdot \left( \sigma \left( -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi + V \times \nabla \times A \right) \right) \quad [6.20]$$

Cette équation assure en particulier que  $j_n = 0$  sur un isolant. L'expression de l'induction magnétique  $B$  est obtenue grâce à l'équation [6.14]. Par conséquent, l'équation [6.3] est automatiquement vérifiée. Dans le but à nouveau de symétriser les matrices de résolution, on utilise le changement de variable suivant [BIR 89] :

$$\phi = \frac{\partial W}{\partial t} \quad [6.21]$$

Finalement on résout le système d'équations :

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{\nabla \times A}{\mu} \right) &= \sigma \left( -\frac{\partial(A + \nabla W)}{\partial t} + V \times (\nabla \times A) \right) \\ \nabla \cdot \left( \sigma \left( -\frac{\partial(A + \nabla W)}{\partial t} + V \times (\nabla \times A) \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad [6.22]$$

avec la jauge [6.19].

En plus des conditions aux interfaces décrites par les équations [6.9], il faut ajouter la continuité de la composante normale de  $A$  :

$$[A \cdot n] = 0 \quad [6.23]$$

### 6.2.1.3. Forme faible

La forme faible de la formulation en  $(A, W)$  est obtenue en projetant les équations [6.22] sur l'espace des fonctions tests  $(\alpha, \beta)$  :

$$\begin{aligned} \iiint_{(\Omega)} \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \alpha \cdot \nabla \times A + \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \alpha \cdot \nabla \cdot A + \sigma \alpha \cdot \left( \frac{\partial(A + \nabla W)}{\partial t} - V \times \nabla A \right) \right) d\Omega + \\ \iint_{(I) \cup (\Gamma)} \left( -\frac{\nabla \cdot A}{\mu} (\alpha \cdot n) + \alpha \cdot \left( n \times \frac{\nabla \times A}{\mu} \right) \right) dS = 0 \end{aligned} \quad [6.24a]$$

$$\begin{aligned} \iiint_{(\Omega)} \left( \sigma \nabla \beta \cdot \left( \frac{\partial(A + \nabla W)}{\partial t} - V \times \nabla A \right) \right) d\Omega + \\ \iint_{(I) \cup (\Gamma)} \sigma \beta \left( -\frac{\partial(A + \nabla W)}{\partial t} + V \times \nabla A \right) dS = 0 \end{aligned} \quad [6.24b]$$

Elle correspond à la résolution d'un système matriciel  $MX + L \frac{dX}{dt} = F(X)$  où  $X$  est le quadri-vecteur  $(A, W)$ ,  $M$  et  $L$  les matrices définies avec les notations usuelles par :

$$\begin{aligned} M_{11} = M_{22} = M_{33} = \mu^{-1} (\partial_x \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j + \partial_y \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j + \partial_z \alpha_i \cdot \partial_z \alpha_j) ; \\ M_{12} = \mu^{-1} (-\partial_y \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j + \partial_x \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j) ; M_{13} = \mu^{-1} (-\partial_z \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j + \partial_x \alpha_i \cdot \partial_z \alpha_j) ; \\ M_{21} = \mu^{-1} (-\partial_x \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j + \partial_y \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j) ; M_{23} = \mu^{-1} (-\partial_z \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j + \partial_y \alpha_i \cdot \partial_z \alpha_j) ; \\ M_{31} = \mu^{-1} (-\partial_x \alpha_i \cdot \partial_z \alpha_j + \partial_z \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j) ; M_{32} = \mu^{-1} (-\partial_y \alpha_i \cdot \partial_z \alpha_j + \partial_z \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j) ; \\ M_{14} = M_{24} = M_{34} = M_{41} = M_{42} = M_{43} = M_{44} = 0 ; \\ L_{11} = L_{22} = L_{33} = \sigma \alpha_i \cdot \alpha_j ; L_{12} = L_{13} = L_{21} = L_{23} = L_{31} = L_{32} = 0 ; \\ L_{14} = \sigma \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j ; L_{24} = \sigma \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j ; L_{34} = \sigma \alpha_i \cdot \partial_z \alpha_j ; \\ L_{41} = \sigma \partial_x \alpha_i \cdot \alpha_j ; L_{42} = \sigma \partial_y \alpha_i \cdot \alpha_j ; L_{43} = \sigma \partial_z \alpha_i \cdot \alpha_j ; \\ L_{44} = \sigma (\partial_x \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j + \partial_y \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j + \partial_z \alpha_i \cdot \partial_z \alpha_j) . \end{aligned}$$

On peut démontrer que cette formulation correspond également à la minimisation de l'équation [6.11] en prenant  $\alpha = \frac{\partial A}{\partial t}$  et  $\beta = W$ .

#### 6.2.1.4. *Domaine de validité de la formulation*

Le principal avantage de la formulation en potentiel quadri-vecteur avec jauge de Coulomb est son domaine de validité. En particulier :

- les sauts de  $\sigma$  et  $\mu$  sont autorisés,
- les conducteurs peuvent être non simplement connexes,
- la perméabilité magnétique  $\mu$  peut être non linéaire et anisotrope,
- la formulation est compatible avec la modélisation des aimants.

Cependant, si le domaine d'intégration est de perméabilité magnétique constante, alors une formulation plus économique en temps de calcul peut être utilisée. Dans la partie non conductrice,  $B$  dérivant d'un potentiel  $\phi$  il suffit de calculer ce potentiel (une seule inconnue). Dans la partie conductrice le calcul de  $B$  (3 inconnues) suffit également. Le gain en temps de calcul par rapport à la formulation en potentiel quadri-vecteur peut être conséquent. C'est l'objet de la formulation en  $(B, \phi)$  que nous ne détaillerons pas dans ce chapitre.

### 6.2.2. *Formulation en potentiel quadrivecteur 2D 1/2*

#### 6.2.2.1. *Forme forte*

Dans le cas particulier où  $V$ ,  $\sigma$  et  $\mu$  sont indépendants d'une coordonnée, par exemple de  $z$  en coordonnées cartésiennes, on applique alors une astuce qui permet de réduire le problème précédent à la résolution d'un problème 2D [SOT 98, SOT 99]. Considérons la décomposition du potentiel quadri-vecteur en série de Fourier par rapport à  $z$  :

$$(A, W) = \sum_k (A_k, W_k)(x, y, t)e^{ikz} \quad [6.25]$$

On démontre alors que les modes de Fourier complexes  $(A_k, W_k)$  sont indépendants les uns des autres. On résout ainsi un problème 2D ne dépendant que de  $x$ ,  $y$  et  $t$  pour chaque mode  $k$ .

La forme forte de la formulation en potentiel quadri-vecteur complexe  $(A_k, \phi_k)$  2D<sup>1/2</sup> s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \nabla^* \times \left( \frac{\nabla^* \times A_k}{\mu} \right) &= \sigma \left( -\frac{\partial(A_k + \nabla^* W_k)}{\partial t} + V \times (\nabla^* \times A_k) \right) \\ \nabla^* \cdot \left( \sigma \left( -\frac{\partial(A_k + \nabla^* W_k)}{\partial t} + V \times (\nabla^* \times A_k) \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad [6.26]$$

où l'opérateur  $\nabla^*$  est défini par  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, ik)$ .

La jauge de Coulomb s'écrit :

$$\nabla^* \cdot A_k = 0 \quad [6.27]$$

### 6.2.2.2. Forme faible

La forme faible de la formulation 2D<sup>1/2</sup> en potentiel quadrivecteur complexe  $(A_k, \phi_k)$  est obtenue en projetant les équations [6.26] sur l'espace des fonctions tests complexes  $(\alpha_k, \beta_k)$  :

$$\begin{aligned} \iint_{(\Omega^2)} \left( \frac{1}{\mu} (\nabla^* \times \alpha_k) \cdot (\nabla^* \times A_k) + \frac{1}{\mu} (\nabla^* \cdot \alpha_k) (\nabla^* \cdot A_k) + \sigma \alpha_k \cdot \left( \frac{\partial(A_k + \nabla^* W_k)}{\partial t} - V \times \nabla^* \times A_k \right) \right) d\Omega^2 \\ \oint_{\Gamma^1 \cup \Gamma^1} \left( -\frac{\nabla^* \cdot A_k}{\mu} (\alpha_k \cdot n) + \alpha_k \cdot \left( n \times \frac{\nabla^* \times A_k}{\mu} \right) \right) dl = 0 \end{aligned} \quad [6.28a]$$

$$\begin{aligned} \iint_{(\Omega^2)} \left( \sigma \nabla^* \beta_k \cdot \left( \frac{\partial(A_k + \nabla^* W_k)}{\partial t} - V \times \nabla^* \times A_k \right) \right) d\Omega^2 + \\ \int_{\Gamma^1 \cup \Gamma^1} \sigma \beta_k \left( -\frac{\partial(A_k + \nabla^* W_k)}{\partial t} + V \times \nabla^* \times A_k \right) dS = 0 \end{aligned} \quad [6.28b]$$

A nouveau la forme faible de [6.27] est résolue par la méthode des moindres carrés et correspond au second terme de [6.28a]. La formulation faible [6.28]

correspond à la résolution d'un système matriciel  $MX_k + L \frac{dX_k}{dt} = F(X_k)$  où  $X_k$  est

le quadri-vecteur complexe  $(A_k, \phi_k)$ ,  $M$  et  $L$  les matrices complexes définies avec les notations usuelles par :

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= M_{22} = M_{33} = \mu^{-1}(\partial_x \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j + \partial_y \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j + k^2 \alpha_i \cdot \alpha_j) ; \\
 M_{12} &= \mu^{-1}(-\partial_y \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j + \partial_x \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j) ; M_{13} = ik\mu^{-1}(\alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j + \partial_x \alpha_i \cdot \alpha_j) ; \\
 M_{21} &= \mu^{-1}(-\partial_x \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j + \partial_y \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j) ; M_{23} = ik\mu^{-1}(\alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j + \partial_y \alpha_i \cdot \alpha_j) ; \\
 M_{31} &= -ik\mu^{-1}(\partial_x \alpha_i \cdot \alpha_j + \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j) ; M_{32} = -ik\mu^{-1}(\partial_y \alpha_i \cdot \alpha_j + \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j) ; \\
 M_{14} &= M_{24} = M_{34} = M_{41} = M_{42} = M_{43} = M_{44} = 0 ; \\
 L_{11} &= L_{22} = L_{33} = \sigma \alpha_i \cdot \alpha_j ; L_{12} = L_{13} = L_{21} = L_{23} = L_{31} = L_{32} = 0 ; \\
 L_{14} &= \sigma \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j ; L_{24} = \sigma \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j ; L_{34} = ik\sigma \alpha_i \cdot \alpha_j ; \\
 L_{41} &= \sigma \partial_x \alpha_i \cdot \alpha_j ; L_{42} = \sigma \partial_y \alpha_i \cdot \alpha_j ; L_{43} = -ik\sigma \alpha_i \cdot \alpha_j ; \\
 L_{44} &= \sigma(\partial_x \alpha_i \cdot \partial_x \alpha_j + \partial_y \alpha_i \cdot \partial_y \alpha_j + k^2 \alpha_i \cdot \alpha_j) .
 \end{aligned}$$

### 6.2.2.3. Domaine de validité de la formulation

Le domaine de validité de la formulation  $2D^{1/2}$  en potentiel quadrivecteur complexe est le même que pour la formulation 3D avec toutefois la limitation due à la réduction de la dimension du domaine d'intégration :

- les sauts de  $\sigma$  et  $\mu$  sont autorisés dans le plan  $(x, y)$  uniquement ;
- les conducteurs peuvent être non simplement connexes dans le plan  $(x, y)$  ;
- la perméabilité magnétique  $\mu$  peut être non linéaire et anisotrope dans le plan  $(x, y)$  ;
- la formulation est compatible avec la modélisation des aimants.

### 6.2.2.4. Autres formulations $2D^{1/2}$ et 1D

Le cas où  $V$ ,  $\sigma$  et  $\mu$  sont indépendants de la composante azimutale  $\theta$  en coordonnées cylindriques correspond à une autre formulation  $2D^{1/2}$ . On considère alors la décomposition en série de Fourier par rapport à  $\theta$  du potentiel quadrivecteur :

$$(A, W) = \sum_m (A_m, W_m)(r, z, t) e^{im\theta} \quad [6.29]$$

On démontre que les modes de Fourier complexes  $(A_m, W_m)$  sont indépendants les uns des autres. On résout ainsi un problème 2D ne dépendant que de  $r$ ,  $z$  et  $t$  pour chaque mode  $m$ . Les formes forte et faible de cette formulation s'énoncent de la même manière que pour la formulation en  $z$  avec cette fois l'opérateur  $\nabla^*$  défini par<sup>4</sup> :

$$\nabla^* = \nabla_{r,z} + i \frac{m}{r} \hat{e}_\theta$$

Dans le cas où  $V$ ,  $\sigma$  et  $\mu$  sont indépendants à la fois de  $z$  et  $\theta$  en coordonnées cylindriques, une nouvelle formulation peut être énoncée. On considère alors la décomposition en série de Fourier par rapport à  $z$  et  $\theta$  du potentiel quadri-vecteur :

$$(A, W) = \sum_{k,m} (A_{k,m}, W_{k,m})(r, t) e^{i(m\theta + kz)} \quad [6.30]$$

On démontre que les modes de Fourier complexes  $(A_{k,m}, W_{k,m})$  sont indépendants les uns des autres. On résout ainsi un problème 1D ne dépendant que de  $r$  et  $t$  pour chaque couple  $(k, m)$ . Les formes forte et faible de cette formulation s'énoncent de la même manière que pour la formulation en  $z$  avec cette fois l'opérateur  $\nabla$  défini par :

$$\nabla^* = \nabla_r + i \frac{m}{r} \hat{e}_\theta + ik \hat{z}$$

Les formulations précédentes 2D<sup>1/2</sup> en  $z$ , 2D<sup>1/2</sup> en  $\theta$  ainsi que la formulation 1D en potentiel quadri-vecteur peuvent être énoncées également pour la formulation  $(B, \varphi)$ .

### 6.3. Quelques exemples de simulations

#### 6.3.1. Dynamo de vissage (dynamo de Ponomarenko)

##### 6.3.1.1. Modélisation du problème

La dynamo de vissage a été résolue initialement par Ponomarenko [PON 73] et constitue désormais une dynamo classique en géométrie cylindrique. Par la suite, elle a été étudiée dans le but de produire une dynamo expérimentale [GAI 76]. Les résultats expérimentaux obtenus sont en très bon accord avec les prédictions théoriques [GAI 00, GAI 01].

---

4. Afin d'éviter tout problème de singularité en  $r = 0$ , on effectuera un changement de variable adéquat.

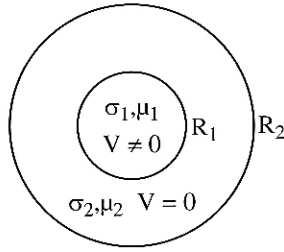


Figure 6.3. Géométrie du domaine d'intégration pour la dynamo de visage

Considérons un domaine d'intégration composé de deux parties à symétrie de révolution (voir figure 6.3), coaxiales et de hauteur  $H$  :

- un cylindre de rayon  $R_1$  de conductivité  $\sigma_1$ , perméabilité  $\mu_1$  et vitesse  $(V_r, V_\theta, V_z) = (0, \omega r, \chi \omega R_1)$  ;

- une couronne extérieure de rayon  $R_2 \gg R_1$ , de conductivité  $\sigma_2$ , de perméabilité  $\mu_2$  et de vitesse nulle.

On distingue le vissage non visqueux ( $\omega = \omega_0$ ) du vissage visqueux ( $\omega$  est une fonction de  $r$  et s'annule pour  $r = R_1$ ). Le nombre de Reynolds magnétique est défini à partir des caractéristiques du cylindre en mouvement :

$$R_m = \sigma_1 \mu_1 \omega R_1^2 \sqrt{1 + \chi^2}$$

Etant donné que le mouvement est indépendant de  $\theta$  et  $z$ , ce problème peut être décrit alternativement à l'aide d'une formulation 3D,  $2D^{1/2}ikz$ ,  $2D^{1/2}im\theta$  ou  $1Dikz + im\theta$  (voir paragraphe 6.2.2.4). Il permet donc de tester et

comparer les différentes formulations en prenant  $H = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\chi R_1$  et des conditions

aux limites périodiques en  $z = 0$  et  $z = H$  pour les modélisations 3D et  $2D^{1/2}im\theta$ . Les conditions aux limites à la frontière du domaine extérieur ( $r = R_2$ ) peuvent être de type Dirichlet ou Neumann. Cette frontière est prise suffisamment éloignée de la partie conductrice ( $R_2 \geq 10R_1$ ) pour pouvoir comparer les résultats numériques

aux calculs asymptotiques ( $R_2 \rightarrow +\infty$ ) existants par ailleurs. La condition initiale doit être non nulle et suffisamment compliquée pour contenir le germe du mode qui sera amplifié. Une condition initiale de type bruit blanc est suffisante.



## 6.3.1.2. Principaux résultats

Ils sont les suivants :

– le mouvement de vissage est une dynamo avec  $R_m^c$  une fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $\chi$ ,  $\mu_2/\mu_1$  et  $\sigma_2/\sigma_1$  ;

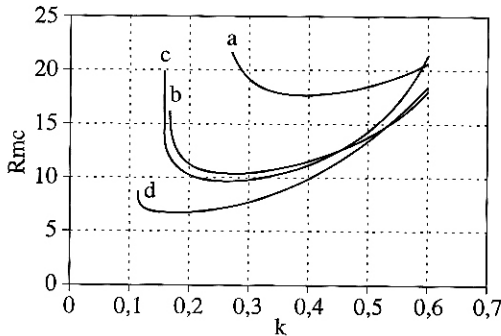
– l'évolution temporelle est exponentielle conformément aux prédictions théoriques pour un écoulement permanent ;

– dans le cas homogène ( $\mu_2/\mu_1 = \sigma_2/\sigma_1 = 1$ ), la valeur minimum de  $R_m^c$  est de 17,73. Elle est obtenue pour  $\chi = 1,3$ ,  $k = -0,39$  et  $m = 1$  ;

– dans le cas non homogène, les résultats obtenus pour  $\mu_2/\mu_1 = a$  et  $\sigma_2/\sigma_1 = b$  sont les mêmes que ceux obtenus pour  $\mu_2/\mu_1 = b$  et  $\sigma_2/\sigma_1 = a$  ;

– pour  $R_m \geq R_m^c$ , plus  $R_m$  est grand et plus le mode  $(m, k)$  dominant (celui dont le taux d'accroissement est le maximum) est élevé ;

– pour le vissage visqueux, le taux d'accroissement maximum  $\text{Re}(p) = O(R_m^{-1/3})$  est obtenu pour  $m, k = O(R_m^{1/3})$ . Le fait que  $\text{Re}(p) \rightarrow 0$  quand  $R_m \rightarrow +\infty$  confère au vissage visqueux sa nature de dynamo « lente » [CHI 95, GIL 88]. Le maximum d'énergie magnétique est confiné dans une couche d'épaisseur  $R_1 O(R_m^{-1/3})$  ;



**Figure 6.4.** Dynamo de Ponomarenko non visqueux,  $m = 1$ . Le nombre de Reynolds magnétique critique  $R_m^c$  est représenté en fonction du nombre d'onde vertical  $k$ , pour différentes propriétés électromagnétiques : (a)  $\sigma_2/\sigma_1 = \mu_2/\mu_1 = 1$  ; (b)  $\sigma_2/\sigma_1 = 10$ ,  $\mu_2/\mu_1 = 1$  ; (c)  $\sigma_2/\sigma_1 = 100$ ,  $\mu_2/\mu_1 = 1$  ; (d)  $\sigma_2/\sigma_1 = \mu_2/\mu_1 = 10$ . Il y a dynamo pour  $R_m \geq R_m^c$ .

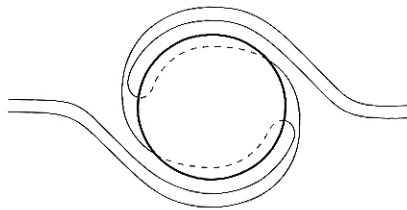
– pour le vissage non visqueux, et pour un mode azimutal  $m$  donné, le taux d'accroissement maximum  $\text{Re}(p) = O(R_m^{-1/3})$  est obtenu pour  $k = O(R_m^{1/2})$  suggérant également une action dynamo de nature « lente ». Cependant, ce taux d'accroissement maximum selon  $k$  dépend de  $m$  et atteint un maximum pour  $m = O(R_m^{1/2})$ . Ce maximum selon  $k$  et  $m$  est  $\text{Re}(p) = O(1)$  à grand  $R_m$ . On en déduit la nature « rapide » de la dynamo de vissage non visqueux [CHI 95, GIL 88]. Le maximum d'énergie magnétique est confiné dans une couche d'épaisseur  $R_1 O(R_m^{-1/2})$ .

Les courbes neutres (taux d'accroissement nul) en fonction de  $k$  et  $R_m$  sont représentées à la figure 6.4 pour plusieurs rapports de conductivité et perméabilité.

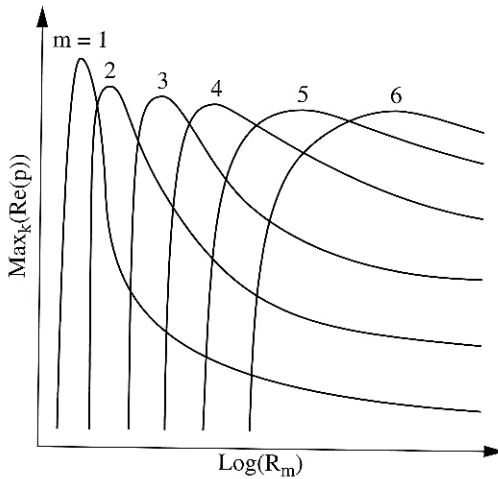
### 6.3.1.3. Mécanisme de génération

Le mécanisme de génération du champ (que le vissage soit visqueux ou non) peut être divisé en deux phases principales : étirement par le cisaillement du champ de vitesse et diffusion magnétique des lignes de champ.

Pour comprendre la phase d'étirement, il est nécessaire de considérer préalablement le cas d'un fluide parfaitement conducteur. On démontre alors qu'en étirant un tube de flux magnétique, l'intensité magnétique dans le tube augmente [CHI 95, MOF 78, MOR 90]. On comprend donc que l'étirement lié aux gradients de vitesse est un ingrédient nécessaire à l'effet dynamo. Cet ingrédient est commun à tout écoulement dynamo, même si le fluide n'est pas parfaitement conducteur. Ici, l'étirement résulte d'un double cisaillement : celui de la composante horizontale du champ de vitesse (rotation du cylindre) et celui de la composante verticale du champ de vitesse (translation du cylindre). Au cours de la rotation du cylindre, le champ magnétique est étiré et déformé comme représenté sur la figure 6.5.



**Figure 6.5.** Déformation des lignes de champ par la rotation du cylindre



**Figure 6.6.** *Dynamo de Ponomarenko non visqueux. Le maximum selon le nombre d'onde vertical  $k$  du taux d'accroissement  $Re(p)$ , en fonction de  $\text{Log}(R_m)$  et pour différentes valeurs du nombre d'onde azimutal  $m$ . Pour  $m$  donné,  $\text{Max}_k(Re(p))$  tend vers zéro à grand  $R_m$ . Par contre, le maximum selon  $k$  et  $m$  de  $Re(p)$  tend vers une valeur non nulle à grand  $R_m$ .*

A cause de cet étirement, l'intensité du champ augmente. On constate également le plissement des lignes de champ magnétique dû à la rotation du cylindre. A cause de ce plissement, le champ magnétique dans le cylindre est de sens opposé au champ initial à l'extérieur. On comprend que, dans le cas d'une rotation pure, ces champs étant de sens opposés de part et d'autre de la frontière du cylindre, ils s'annulent au cours du temps par diffusion (le mouvement de rotation n'est donc pas une dynamo). Considérons maintenant le cisaillement entre le mouvement vertical du cylindre et l'extérieur au repos. Ce cisaillement a pour effet (en plus d'un étirement supplémentaire) d'entraîner le champ intérieur à une hauteur  $z$  différente du champ initial et de constituer la double hélice de la figure 6.2. Cette double hélice magnétique a d'ailleurs été observée expérimentalement [ALE 00]. Le champ magnétique après étirement est donc principalement azimutal et axial, approximativement aligné avec le cisaillement du champ de vitesse. Cela constitue l'élément principal du mécanisme dynamo : la génération d'un champ magnétique hélicitaire à partir d'un champ magnétique de composante radiale non nulle. Pour clore le mécanisme, il faut ensuite que ce champ hélicitaire puisse générer à son tour une composante de champ radiale non nulle. Cela se fait grâce à la diffusion de la composante azimutale du champ hélicitaire. En effet, l'expression de la diffusion du champ en géométrie cylindrique montre que la diffusion de la composante azimutale du champ s'effectue non seulement selon la coordonnée azimutale mais également selon la coordonnée radiale (pour  $m$  non nul).

Cette explication heuristique pour le mode azimutal  $m = 1$  permet d'appréhender les mécanismes caractéristiques d'une dynamo « lente ». En effet la diffusion joue un rôle primordial. On démontre que pour  $R_m \rightarrow +\infty$ , le taux d'accroissement pour  $m = 1$  tend vers zéro. Cela est d'ailleurs vrai pour n'importe quelle valeur de  $m$ . Cependant, si l'on considère un spectre infini de modes azimutaux  $m$ , alors on démontre que dans le cas du vissage non visqueux, la dynamo est « rapide » (voir figure 6.6).

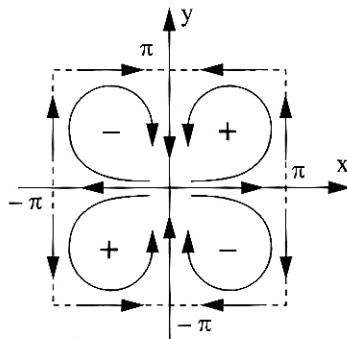
### 6.3.2. Dynamo à deux échelles sans paroi (dynamo de Roberts)

#### 6.3.2.1. Modélisation du problème

Considérons un domaine d'intégration constitué d'un carré de côté  $2\pi$  et des conditions aux limites périodiques en  $x$  et  $y$ . L'écoulement est défini en coordonnées cartésiennes sans dimension par :

$$(V_x, V_y, V_z) = (\sin x \cos y, -\cos x \sin y, \sqrt{2}\chi \sin x \sin y)$$

Cet écoulement est constitué de vortex parallèles et de sens opposés. Chaque vortex est inclus dans une cellule de section carrée et la vitesse est maximum sur les bords (voir figure 6.7). Le fluide est homogène en conductivité électrique et perméabilité magnétique. Ce problème a été résolu initialement par G.-O. Roberts [ROB 72] et constitue désormais une dynamo classique en géométrie cartésienne. Par ailleurs, il a été étudié dans le but de produire une dynamo expérimentale [BUS 96, RAD 98]. Les résultats expérimentaux obtenus [STI 01] sont en bon accord avec les prédictions théoriques.



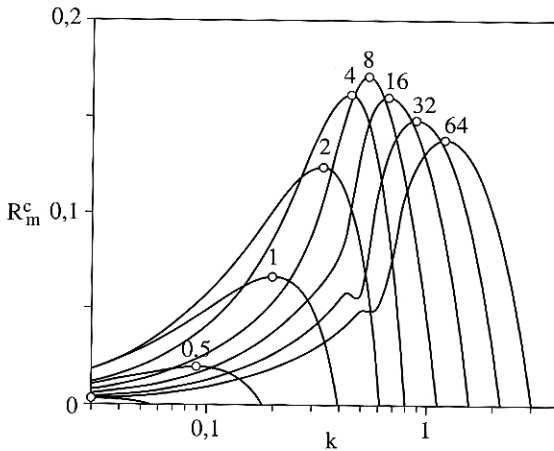
**Figure 6.7.** Lignes de courant de vitesse de l'écoulement de Roberts dans le plan  $xy$ . Elles coïncident avec les iso-valeurs de  $V_z$ . Les signes  $+$  ( $-$ ) correspondent à  $V_z > 0$  ( $< 0$ )

Puisque le mouvement est indépendant de  $z$ , ce problème peut être décrit alternativement à l'aide d'une formulation 3D ou 2D<sup>1/2</sup> $ikz$  (voir paragraphe 6.2.2.3). Il permet donc de tester et comparer les différentes formulations en prenant pour la modélisation 3D une hauteur sans dimension du domaine d'intégration  $H = \frac{2\pi}{k}$ , des conditions aux limites périodiques en  $z = 0$  et  $z = H$  et sur les bords  $x = \pm\pi$  et  $y = \pm\pi$ . Une condition initiale de type bruit blanc est suffisante.

### 6.3.2.2. Résultats

L'écoulement de Roberts est une dynamo avec  $R_m^c$  une fonction de  $k$  et  $\chi$ . Pour une valeur donnée de  $\chi$  et de  $R_m$ , il existe toujours une valeur de  $k$  suffisamment petite pour laquelle l'écoulement de Roberts est une dynamo (contrairement à la dynamo de vissage). Ceci est dû à la notion de séparation d'échelles horizontales entre l'écoulement (dimension caractéristique égale à  $2\pi$ ) et le champ magnétique moyen (dimension caractéristique infinie selon  $x$  et  $y$ ).

L'évolution temporelle est exponentielle conformément aux prédictions théoriques pour un écoulement permanent.



**Figure 6.8.** *Dynamo de Roberts : taux d'accroissement  $Re(p)$  en fonction du nombre d'onde vertical  $k$ , pour  $\chi=1$ . Chaque courbe correspond à  $R_m = 2^n$  avec  $n \in \{-2; -1; 0; 1; \dots; 6\}$ . Pour chaque valeur de  $R_m$ , le taux d'accroissement maximum selon  $k$  est indiqué par un cercle. Il atteint un maximum pour  $R_m = 8$  et tend vers zéro pour  $R_m \rightarrow +\infty$  (dynamo lente).*

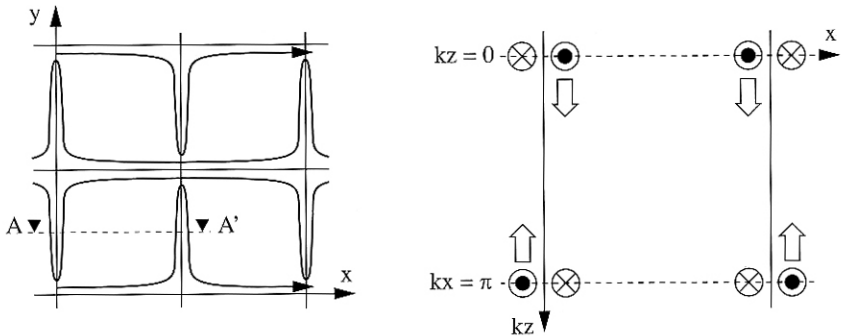
Pour  $\chi = 1$ , le taux d'accroissement maximum  $\text{Re}(p) = O(\ln(\ln R_m) / \ln R_m)$  est obtenu pour  $kR_m^{-1/2} = O((\ln(R_m))^{-1/2})$ . Le fait que  $\text{Re}(p) \rightarrow 0$  quand  $R_m \rightarrow +\infty$  confère à l'écoulement de Roberts sa nature de dynamo « lente » [CHI 95, SOW 87]. Le maximum d'énergie magnétique est confiné dans une couche d'épaisseur  $O(R_m^{-1/2})$ .

Le taux d'accroissement en fonction de  $k$  et  $R_m$  est représenté à la figure 6.8 pour  $\chi = 1$ .

### 6.3.2.3. Mécanisme de génération

La génération du champ magnétique de la dynamo de Roberts résulte d'un mécanisme de type étirement, plissement et cisaillement.

Considérons un champ magnétique de la forme  $(B_x, B_y, B_z) = B_0(\cos kz, 0, 0)$ . L'étirement et le plissement du champ magnétique dus à l'écoulement sont schématisés à la figure 6.9a dans le plan  $z = 0$ .

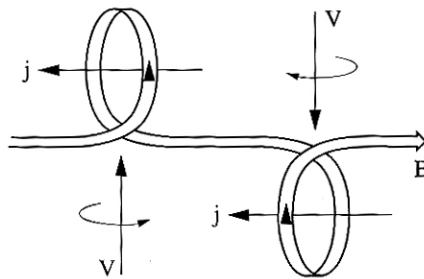


**Figure 6.9.** Mécanismes de la dynamo de Roberts : (a) étirement et plissement du champ magnétique dans le plan  $z = 0$  ; (b) Coupe AA' : cisaillement du champ par la vitesse verticale. Les flèches blanches représentent le sens du déplacement du champ

Le champ est étiré selon  $y$ , par conséquent son intensité augmente (voir paragraphe 6.3.1.3). La composante  $B_y$  qui apparaît est de sens opposé de part et d'autre des frontières (plissement). Considérons maintenant le cisaillement selon  $z$  entre deux cellules (coupe AA'). Ce cisaillement a pour effet d'entraîner  $B_y$  dans la direction de  $z$ , mais dans des sens opposés de part et d'autre de la frontière entre

deux cellules (voir figure 6.9b). Par conséquent un champ de la forme  $(B_x, B_y, B_z) = B_0(0, \sin kz, 0)$  est généré. On montre que ce dernier va générer par le même procédé un champ de la forme  $(B_x, B_y, B_z) = B_0(\cos kz, 0, 0)$ . Par conséquent, le champ global amplifié par effet dynamo sera de la forme  $(B_x, B_y, B_z) = B_0(\cos kz, \sin kz, 0)$ .

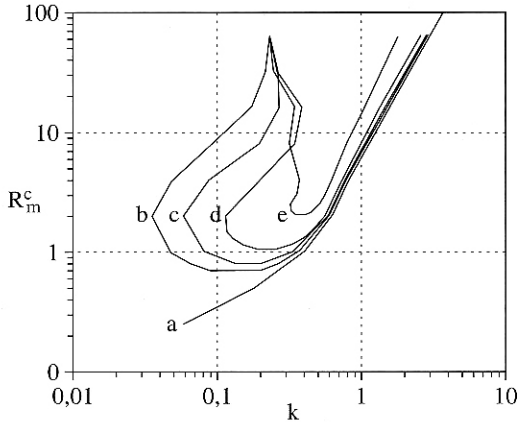
Une caractéristique fondamentale de la dynamo de Roberts est la séparation d'échelles entre l'écoulement et le champ magnétique moyen<sup>5</sup>. On démontre en effet que l'écoulement à petite échelle peut générer du champ à grande échelle, grâce à un mécanisme connu sous le nom d'effet alpha [KRA 80]. Ce mécanisme est présent dans la plupart des dynamos des objets naturels. Il offre une explication alternative et compatible avec le mécanisme d'étirement, plissement et cisaillement vu précédemment. Ainsi, un champ moyen initial de la forme  $(B_x, B_y, B_z) = B_0(\cos kz, 0, 0)$  est déformé par l'écoulement en formant des boucles de champ (voir figure 6.10). Ces boucles induisent une densité de courant  $j$  opposée au champ. Le champ magnétique moyen induit par ce courant est de la forme  $(B_x, B_y, B_z) = B_0(0, \sin kz, 0)$ . On montre que ce dernier va générer par le même procédé un champ moyen de la forme  $(B_x, B_y, B_z) = B_0(\cos kz, 0, 0)$ . Par conséquent, le champ moyen global amplifié par effet dynamo sera de la forme  $(B_x, B_y, B_z) = B_0(\cos kz, \sin kz, 0)$ .



**Figure 6.10.** Illustration de l'effet alpha : la déformation du champ magnétique moyen  $B$  par les vortex  $V$  génère de la densité de courant  $j$  dans le sens opposé au champ  $B$ . Cette densité de courant induit un champ perpendiculaire à  $B$  et déphasé en  $z$

5. Moyenne spatiale selon  $x$  et  $y$ .

Il est légitime de considérer également un champ magnétique moyen d'échelle arbitraire selon  $x$  et  $y$  (qui ne soit pas nécessairement infinie). Cette étude a été menée dans le cadre de l'expérience construite à Karlsruhe. Un écoulement de sodium liquide parcourt 52 cellules de Roberts. Le champ moyen a donc une dimension caractéristique égale à la taille de ces 52 cellules. Les résultats théoriques obtenus sont sensiblement différents de ceux obtenus dans le cas idéal d'une infinité de cellules [PLU 01] (voir figure 6.11).



**Figure 6.11.** *Dynamo de Roberts : nombre de Reynolds magnétique critique en fonction de  $k$ , pour  $\chi = 1$ . Les courbes correspondent à un champ magnétique moyen s'étendant sur (a) une infinité, (b) 50, (c) 32, (d) 18, (e) 8 cellules de Roberts*

### 6.3.3. Dynamo à deux échelles avec parois (dynamo de Plunian)

#### 6.3.3.1. Modélisation du problème

Considérons un domaine d'intégration constitué d'un carré de côté  $2\pi$  et des conditions aux limites périodiques en  $x$  et  $y$ . L'écoulement est défini en coordonnées cartésiennes sans dimension par

$$(V_x, V_y, V_z) = (-a \sin y(1 + \cos x), a \sin x(1 + \cos y), Ka(1 + \cos x)(1 + \cos y))$$

avec  $K = \chi/2$  et  $2a\sqrt{1 + \chi^2} = 1$ , où  $\chi$  est un facteur de vissage. Cet écoulement est constitué de vortex parallèles et de même sens. Chaque vortex est inclus dans une cellule de section carrée et la vitesse est nulle sur les parois des cellules. Le problème original concerne un fluide homogène en conductivité électrique et



perméabilité magnétique [PLU 99]. Des parois d'épaisseurs et de propriétés électromagnétiques différentes de celles du fluide ont également été considérées [SOT 99].

Le mouvement étant indépendant de  $z$ , ce problème peut être décrit là encore à l'aide d'une formulation 3D ou  $2D^{1/2}ikz$  avec les mêmes conditions aux limites et initiales que le problème de Roberts (voir paragraphe 6.3.2.1).

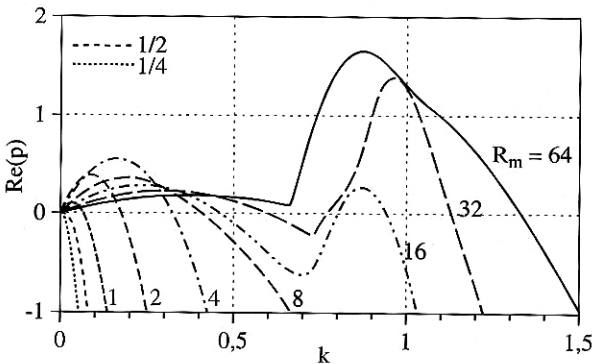
### 6.3.3.2. Résultats

Pour des parois d'épaisseur nulle, les résultats sont qualitativement les mêmes que ceux de la dynamo de Roberts (voir paragraphe 6.3.2.2) avec toutefois une différence concernant le taux d'accroissement maximum  $\text{Re}(p)_{\max} = O(R_m^{-1/3})$  qui est obtenu pour  $k = O(R_m^{1/3})$ .

Deux régimes de génération ont été identifiés en fonction de  $k$  et  $R_m$  : un régime de type Ponomarenko et l'autre de type Roberts.

Pour des parois d'épaisseur non nulle,  $R_m^c$  dépend de  $k$ , de l'épaisseur des parois et des rapports de conductivité et perméabilité entre fluide et parois.

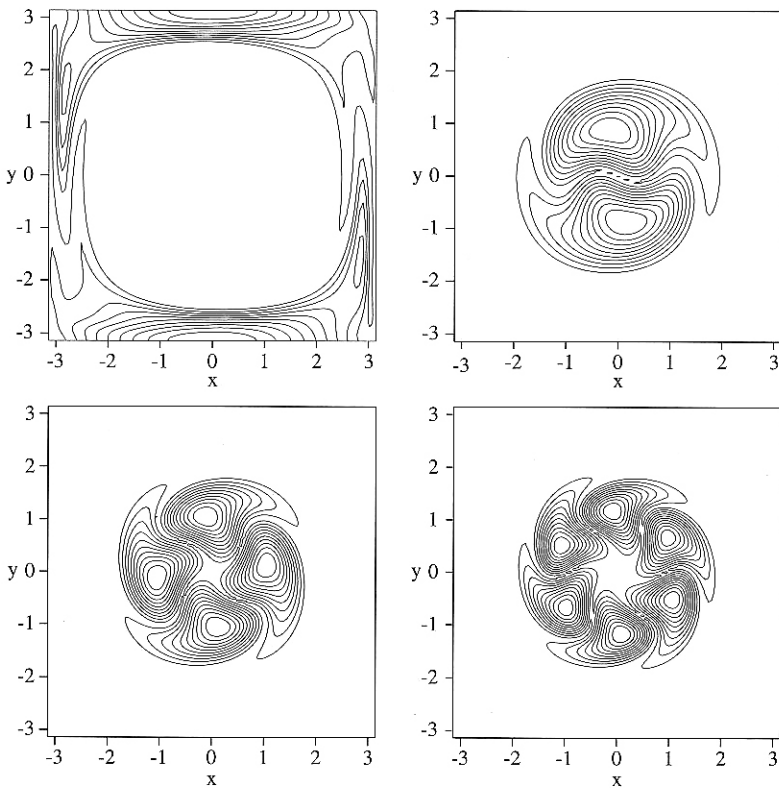
Le taux d'accroissement en fonction de  $k$  et  $R_m$  est représenté à la figure 6.12 pour  $\chi = 1$  et des parois d'épaisseur nulle (sans paroi).



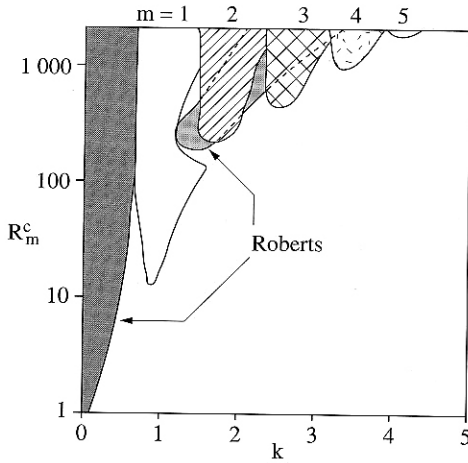
**Figure 6.12.** *Dynamo de Plunian sans paroi : taux d'accroissement en fonction de  $k$  pour différentes valeurs de  $R_m$ . Les petites (grandes) valeurs de  $k$  correspondent au régime de Roberts (Ponomarenko)*

## 6.3.3.3. Mécanismes de génération

Le mécanisme de génération de la dynamo de Plunian est à nouveau de type étirement, plissement et cisaillement. Son originalité réside dans l'existence de deux régimes possibles de dynamo : Roberts ou Ponomarenko. En effet, selon les valeurs de  $k$  et  $R_m$ , on observe (voir figure 6.13) une énergie magnétique confinée dans une couche soit au voisinage des parois (régime de Roberts) soit à l'intérieur des cellules (régime de Ponomarenko). Dans les deux cas, l'épaisseur de cette couche est de l'ordre de  $O(R_m^{-1/3})$ . A grand  $R_m$ , le régime de Ponomarenko est dominant et la solution obtenue correspond à un mode azimuthal (à l'échelle de chaque cellule) croissant avec  $R_m$  (voir figure 6.14).



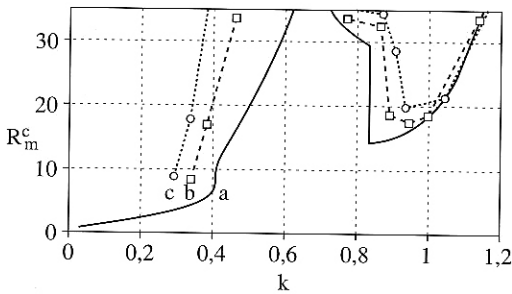
**Figure 6.13.** *Dynamo de Plunian sans paroi : Iso-valeurs de l'énergie maximum pour le régime de (a) Roberts, (b) Ponomarenko,  $m = 1$ , (c) Ponomarenko,  $m = 2$ , (d) Ponomarenko,  $m = 3$ . Le paramètre  $m$  est le mode azimuthal dans un repère cylindrique local dont l'origine est au centre de la cellule.*



**Figure 6.14.** *Dynamo de Plunian sans paroi : Les deux régimes possibles Roberts ou Ponomarenko sont représentés dans le plan  $(k, R_m^c)$ . Pour le régime de Ponomarenko, le mode  $m$  est indiqué*

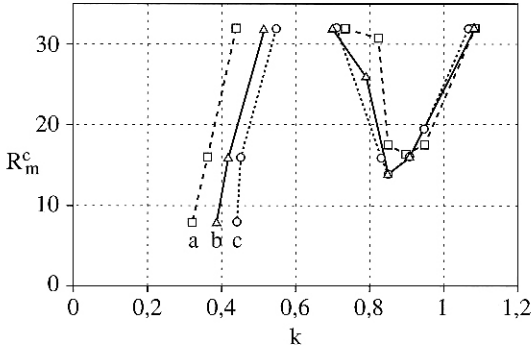
#### 6.3.3.4. Influence des parois

A petit  $k$ , l'existence de parois d'épaisseur non nulle autour de chaque cellule est défavorable à la dynamo (voir figure 6.15). En effet, le régime à petit  $k$  est de type Roberts et par conséquent la génération de champ résulte de l'interaction des cellules. L'existence de parois freine cette interaction et  $R_m^c$  augmente. A grand  $k$ , l'influence de parois autour de chaque cellule est négligeable. En effet, le régime est alors de type Ponomarenko (visqueux) et la génération a lieu dans le fluide, ne nécessitant pas l'interaction des cellules.



**Figure 6.15.** *Dynamo de Plunian homogène :  $R_m^c$  en fonction de  $k$  pour différentes épaisseurs de paroi. Le rapport épaisseur de paroi sur taille de cellule est de (a) nulle, (b) 5 %, (c) 10 %*

Pour des parois de perméabilité (ou conductivité) supérieure à celle du fluide, la dynamo est favorisée à petit  $k$  (voir figure 6.16). La dissipation par effet Joule étant plus faible dans les parois. A grand  $k$ , l'influence des parois est négligeable (régime de Ponomarenko visqueux). Enfin, comme pour la dynamo de vissage, la conductivité électrique et la perméabilité magnétique jouent un rôle symétrique.



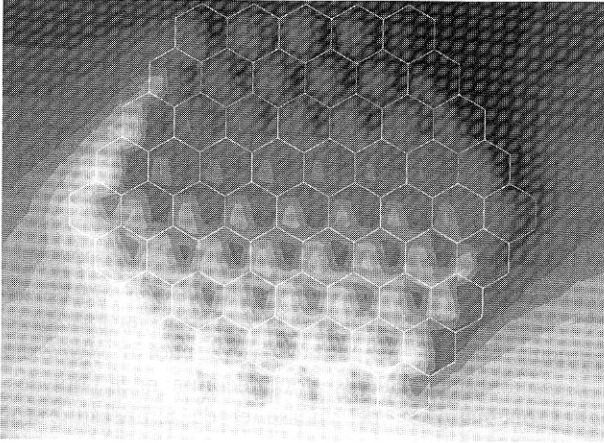
**Figure 6.16.** *Dynamo de Plunian non homogène :  $R_m^c$  en fonction de  $k$  pour un rapport d'épaisseur de paroi sur taille de cellule égal à 5 %. Le rapport de perméabilité de paroi sur celle du fluide est de (a) 1, (b) 10, (c) 100*

### 6.3.4. Une dynamo à l'échelle industrielle

En 1989 et 1990, plusieurs arrêts imprévus sont survenus pendant le cycle d'exploitation du réacteur à neutrons rapides Phénix. A chaque fois, une baisse furtive du signal de puissance du réacteur a été observée, entraînant les automatismes d'arrêt de sécurité. Plusieurs scénarii ont été envisagés pour tenter d'expliquer la cause de ce phénomène mystérieux. L'un d'eux est fondé sur l'existence d'une instabilité mécanique provoquée par un effet dynamo dans le réacteur. Le cœur du réacteur est effectivement traversé par du sodium liquide à grande vitesse avec une géométrie d'écoulement analogue à la dynamo de Plunian<sup>6</sup> donc propice à une amplification spontanée de champ magnétique. Par ailleurs, les parois des cellules du cœur étant construites avec des matériaux ferromagnétiques, les efforts exercés par l'interaction du champ et des courants dans le sodium étaient suffisants pour générer l'instabilité mécanique nécessaire à déclencher les arrêts de

6. Chaque cellule du cœur étant cependant de section hexagonale.

sécurité. On a donc probablement observé de façon indirecte un effet dynamo dans le cœur d'un RNR.



**Figure 6.17.** Iso-valeur  $B_z$  dans une section horizontale d'un cœur.  
La couleur claire (foncée) indique une valeur de  $B_z$  positive (négative)

Nous présentons à la figure 6.17 le résultat d'un calcul EF3D où sont représentées les iso-valeurs de la composante verticale du champ magnétique dans une section horizontale du cœur du réacteur. Pour ce calcul, le cœur est constitué de 61 cellules de section hexagonale. L'écoulement parcourant chaque cellule est de type vissage. L'intérêt principal de cette figure est qu'elle montre une double organisation du champ magnétique. Le champ est organisé en double hélice à l'échelle de chaque cellule comme à la figure 6.2 et conformément à la dynamo de vissage. Le champ est également organisé en double hélice à l'échelle du cœur. Cette double organisation de champ est caractéristique d'une dynamo à deux échelles comme celle observée également dans l'expérience de Karlsruhe.

#### 6.4. Modélisation du problème dynamique

Le problème dynamique (modélisation de l'équation de l'induction et de Navier-Stokes) a été formulé et modélisé par la méthode des éléments finis [BEN 99, BEN 01] dans le cas où tout le domaine d'intégration est homogène en conductivité et perméabilité. Cette modélisation pourrait donc être utilisée pour des écoulements de type Ponomarenko, Roberts ou Plunian homogène. Elle n'est cependant pas adaptée au cas d'un milieu conducteur de dimension finie. Les tests effectués

présentent un nombre de Reynolds magnétique trop faible pour obtenir une dynamo. La formulation utilise les variables primaires vitesse, pression et champ magnétique. L'originalité de la méthode repose sur la stratégie de couplage entre la résolution des équations de Navier-Stokes et l'équation de l'induction.

Par ailleurs, nous signalons qu'il existe un benchmark de dynamo en géométrie sphérique qui a été testé et validé par différentes équipes de recherche [CHR 01]. Généralement, la discrétisation spatiale utilisée est de type harmoniques sphériques pour les dépendances latitudinale et longitudinale. La discrétisation dans la direction du rayon est de type spectral ou différences finies. L'utilisation des harmoniques sphériques est naturellement suggérée par la géométrie sphérique du domaine d'intégration. Par ailleurs, elle présente l'avantage de pouvoir sélectionner un nombre réduit d'harmoniques (dans la mesure où cette sélection puisse donner des résultats raisonnables). Le temps de calcul peut alors être considérablement réduit (comme pour les résolutions  $2D^{1/2}$  et  $1D^{1/2}$  décrites au paragraphe 6.2.2). La méthode des éléments finis 3D ne permet pas de choisir *a priori* une résolution « intelligente » et économique<sup>7</sup>. Elle est donc recommandée pour des problèmes où toutes les échelles magnétiques, de vitesse et de température (pour le cas de convection naturelle) sont présentes et ne peuvent pas être *a priori* négligées. La méthode des éléments finis pourrait être également plus avantageuse pour des calculs massivement parallèles.

## 6.5. Bibliographie

- [ALE 00] ALEMANY A., MARTY P., PLUNIAN F., SOTO J., « Experimental investigations of dynamo action in the secondary pumps of the FBR Superphenix », *J. Fluid Mech.*, vol. 403, p. 263-276, 2000.
- [BEN 99] BEN SALAH N., SOULAIMANI A., HABASHI W.G., FORTIN M., « A conservative stabilized Finite Element method for the Magnetohydrodynamic equations », *IJNMF*, vol. 29, p. 535, 1999.
- [BEN 01] BEN SALAH N., SOULAIMANI A., HABASHI W.G., FORTIN M., « A Finite Element method for the magnetohydrodynamic », dans *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 2001.
- [BIR 89] BIRO O., KURT P., « On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three dimensional eddy currents », *IEEE Trans. Mag.*, vol. 25, n° 4, 1989.
- [BUS 96] BUSSE F.H., MULLER U., STIEGLITZ R., TILGNER A., « A two-scale homogeneous dynamo: an extended analytical model and an experimental demonstration under development », *Magnetohydrodynamics*, 32, p. 235-248, 1996.

---

7. L'utilisation de maillages adaptatifs en temps (permettant de mailler finement les petites échelles là où elles sont et grossièrement le reste du domaine) devrait cependant apporter une solution élégante au problème.

- [CHI 95] CHILDRESS S., GILBERT A.D., *Stretch, Twist, Fold: The fast dynamo*, Springer Verlag, 1995.
- [CHR 01] CHRISTENSEN U.R., AUBERT J., CARDIN P., DORMY E., GIBBONS S., GLATZMAIER G.A., GROTE E., HONKURA Y., JONES C., KONO M., MATSUSHIMA M., SAKURABA A., TAKAHASHI F., TILGNER A., WICHT J., ZHANG K., « A numerical dynamo benchmark », *Earth Planet. Inter.*, 2001.
- [COX 69] COX A., « Geomagnetic reversals », *Science*, vol. 163, p. 237-245, 1969.
- [CSE 82] CSENDES Z.J., WEISS J., HOOLE S.R.H., « Alternative vector potential formulation of 3D magnetostatic field problems », *IEEE Trans. Mag.*, vol. 18, p. 367-372, 1982.
- [GAI 76] GAILITIS A., FREIBERGS J., « To the theory of a helical MHD-dynamo », *Magnetohydrodynamics*, vol. 12, p. 127-129, 1976.
- [GAI 00] GAILITIS A., LIELAUSIS O., DEMENT'EV S., PLATACIS E., CIFERSONS G., GERBETH G., GUNDRUM T., STEFANI F., CHRISTEN M., HANEL H., WILL G., « Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, p. 4 365-4 368, 2000.
- [GAI 01] GAILITIS A., LIELAUSIS O., PLATACIS E., DEMENT'EV S., CIFERSONS G., GERBETH G., GUNDRUM T., STEFANI F., CHRISTEN M., WILL G., « Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, p. 4 365-4 368, 2000.
- [GIL 88] GILBERT A., « Fast dynamo action in the Ponomarenko dynamo », *GAFD*, vol. 44, p. 241, 1988.
- [HID 79] HIDE R., « Dynamo theorems », *GAFD*, vol. 12, p. 171-176, 1979.
- [KOL 61] KOLM H.H., MAWARDI O.K., « Hydromagnet: a self-generating liquid conductor electromagnet », *J. of Applied Phys.*, vol. 32, p. 7-1 296, 1 961.
- [KRA 80] KRAUSE F., RÄDLER K.-H., *Mean field magneohydrodynamics and dynamo theory*, Akademie-Verlag & Pergamon, 1980.
- [LEO 80] LÉORAT J., POUQUET A., FRISCH U., « Turbulence MHD développée et génération de champ magnétique », *J. Phys.*, vol. 41, p. 359-369, 1980.
- [MAS 84] MASSÉ P., « Modelling of continuous media methodology and computer aided design of finite element programs », *IEEE Trans. Mag.*, vol. 20, n° 5, p. 1 885-1 890, 1984.
- [MER 95] MERRILL R.T., MCFADDEN P.L., « Dynamo theory and paleomagnetism », *J. Geophys. Res.*, vol. 100, p. 317-326, 1995.
- [MOF 78] MOFFATT H.K., *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Camb. Univ. Press, New-York, 1978.
- [MOF 89] MOFFATT H.K., « Stretch, twist & fold », *Nature*, vol. 341, 1989.
- [MOR 90] MOREAU R., *Magnetohydrodynamics*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, Londres, 1990.
- [PAR 66] PARKER R.L., « Reconnexion of lines of force in rotating spheres and cylinders », *Proc. Roy. Soc.*, vol. A291, p. 60-72, 1966.

- [PLU 95] PLUNIAN F., « Alemany A., Marty P., « Influence of MHD parameters on electromagnetic self-excitation in the core of a FBR », *Magnetohydrodynamics*, vol. 31, n° 4, 1995.
- [PLU 96] PLUNIAN F., MASSÉ Ph., « An optimal preconditionned scheme for Finite Element modelling of kinematic MHD dynamo effect », *Proc. of Eccomas 96*, France, 1996.
- [PLU 96] PLUNIAN F., Etude de l'effet dynamo dans le coeur du réacteur Phenix, Thèse INPG, 1996.
- [PLU 98] PLUNIAN F., ALEMANY A., MARTY P., MASSÉ P., « Direct numerical modeling of kinematic dynamo effect. Application to the geometry of the core of the French fast breeder reactor Phenix », *Progress in Astronautics and Aeronautics AIAA*, vol. 182, p. 537-550, 1998.
- [PLU 99] PLUNIAN F., MARTY P., ALEMANY A., « Kinematic dynamo action in a network of screw motions. Application to the core of a fast breeder reactor », *J. Fluid Mech.*, vol. 382, p. 137-154, 1999.
- [PLU 02a] PLUNIAN F., RÄDLER K.-H., « Subharmonic dynamo action in the Roberts flow », *Geophys.Astr.Fluid.Dyn.*, vol. 96 n° 2, p. 115-133, 2002 .
- [PLU 02b] PLUNIAN F., RÄDLER K.-H., « Harmonic and subharmonic solutions of the Roberts dynamo model. Application to the Karlsruhe experiment », *Magnetohydrodynamics*, vol. 38, n° 1-2, p. 95-106, 2002.
- [PON 73] PONOMARENKO, Y.B., « On the theory of hydromagnetic dynamo », *Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, URSS, vol. 6, 47-51, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 14, p. 775-779, 1973.
- [PRI 82] PRIEST E.R., « Solar magnetohydrodynamics », *Geophys. & Astr. Monographs*, D. Reidel Pub. Comp., 1982.
- [PRO 79] PROCTOR M.R.E., « Necessary conditions for the MHD Dynamo », *GAFD*, vol. 14, p. 127-145, 1979.
- [RAD 95] RÄDLER K.-H., « Cosmic Dynamos », *Rev. Mod. Astron.*, vol. 8, p. 295-321, 1995.
- [RAD 98] RÄDLER K.-H., APSTEIN E., RHEINHARDT M., SCHULER M., « The Karlsruhe Dynamo experiment – A mean field approach », *Studia geoph. et geod.*, vol. 42, p. 224-231, 1998.
- [ROB 72] ROBERTS G.O., « Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity », *Phil. Trans. R. Soc.*, vol. A271, p. 411, Londres, 1972.
- [ROB 92] ROBERTS P., SOWARD A.M., « Dynamo Theory », *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 24, p. 459-512, 1992.
- [SCH 92] SCHMITT D., *The solar dynamo*, IAU Symposium n° 157, Postdam, 1992.
- [SOT 98] SOTO J., PLUNIAN F., MASSÉ P., « A Finite Element-Spectral formulation for the kinematic MHD Dynamo problem », *Proc. of Eccomas 98*, Grèce, 1998.
- [SOT 99] SOTO, Etude cinématique de l'effet dynamo en milieu non homogène. Application aux réacteurs à neutrons rapides, Thèse INPG, 1999.



- [SOW 87] SOWARD A.M., « Fast dynamo action in a steady flow », *J. Fluid Mech.*, vol. 180, p. 267-295, 1987.
- [STI 01] STIEGLITZ R., MÜLLER U., « Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo », *Physics of Fluids*, vol. 13, p. 561-564, 2001.
- [VAL 93] VALET J.P., MENADIER L., « Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years », *Nature*, vol. 366, p. 234-238, 1993.
- [WEI 66] WEISS N.O., « The expulsion of magnetic flux by eddies », *Proc. Roy. Soc.*, vol. A293, p. 310-328, 1966.
- [WEI 94] WEISS N.O., « Solar and Stellar Dynamos », dans Proctor M.R.E. & Gilbert A.D (dir.), *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*, Camb. Univ. Press, New-York, 1994.
- [ZEL 83] ZELDOVITCH YA. B., RUZMAIKIN A.A., SOKOLOFF D.D., « Magnetic fields in astrophysics », *Gordon & Breach science publishers*, New-York, 1983.