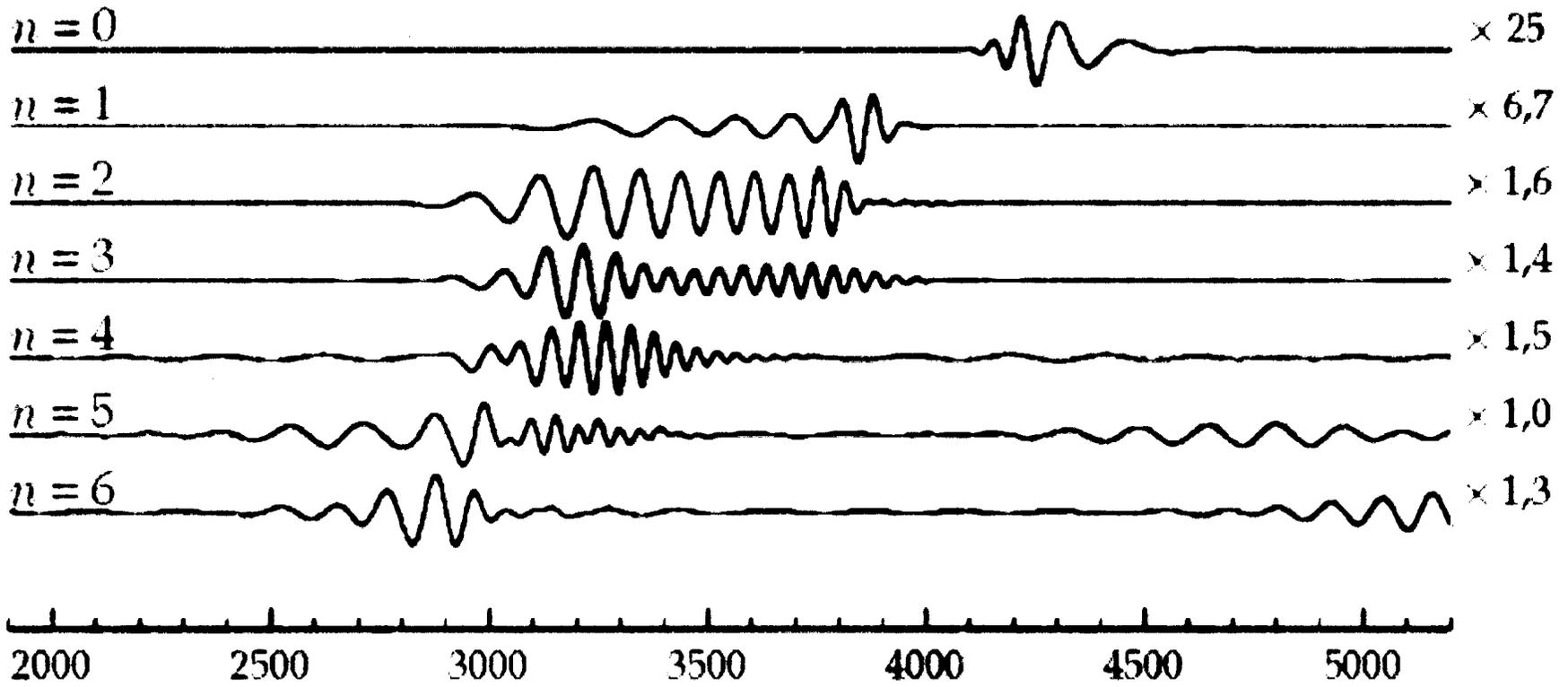
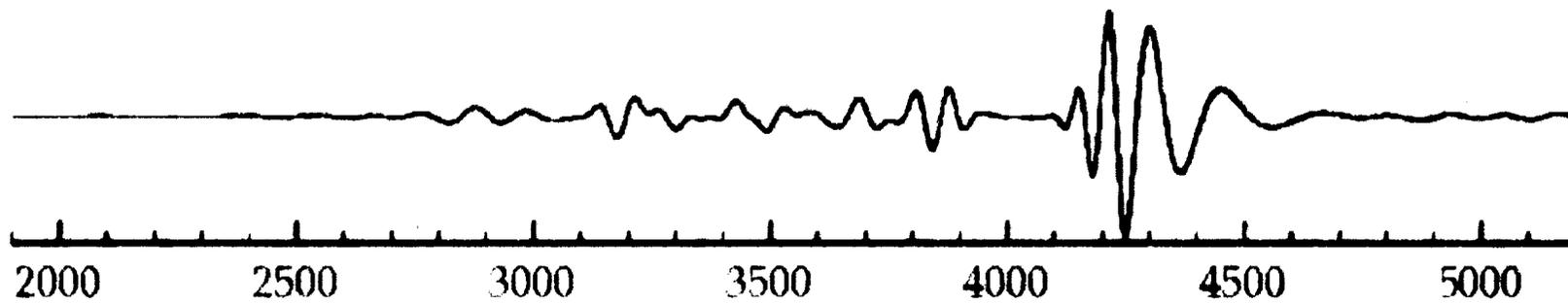


Figure 16.10. Dispersion curves for phase velocity C and group velocity U for the upper mantle of model AK135 as a function of period T : (a) Rayleigh waves, (b) Love waves. Phase velocity is shown as solid lines, group velocity as chain dotted lines in tone.



temps (s)

LES ONDES DE RAYLEIGH : Résumé

Ce sont les ondes de surface associées aux polarisations dans le plan P-SV.

Elle pourra exister la surface d'un demi-espace (contrairement à l'onde de Love). Mais aussi pour un milieu stratifié. En particulier $\theta > \theta_c \rightarrow$ SV réflexion totale.

\approx SH \Rightarrow modes supérieurs de Rayleigh \approx de Love.

- Demi-espace :

Si l'on écrit l'existence d'une onde propagative horizontalement, dont l'amplitude décroît avec la profondeur et les conditions de surface libre, on arrive à une équation de dispersion :

$$\left(2 - \frac{C^2}{W^2}\right)^2 = \sqrt{1 - \frac{C^2}{W^2}} \sqrt{1 - \frac{C^2}{V^2}}$$

indépendante de la fréquence \Rightarrow pas de dispersion

avec $C < W < V$

En posant $\frac{V}{W} = \sqrt{3}$ (i. e. $\lambda = \mu$ ou $\sigma = 1/4$) $\Rightarrow C^2 = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) W^2$ est la seule racine acceptable.

soit $C_r = 0.919 W$

(RAYLEIGH WAVES)

Waves at the surface of an elastic half-space.

P-SV case
exercise: SH?

$$\begin{aligned} u_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bullet}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{u}^S = \text{rot } \vec{\psi} \Rightarrow$$

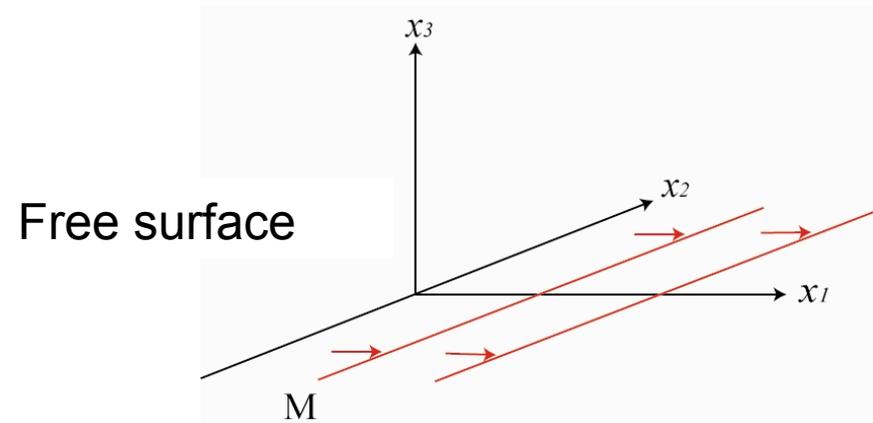
$$\vec{u}^S = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_1^S &= - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ u_3^S &= + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{\psi}$ can be replaced by $\psi_2 = \psi$

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x} \phi - \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

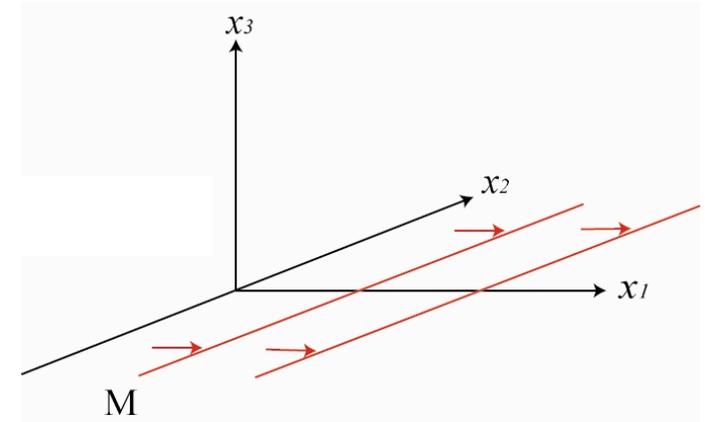
$$u_3 = \frac{\partial}{\partial z} \phi - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$



- Harmonic solution propagating along x

$$\phi = f(z) \exp(ik(x - ct))$$

$$\psi = g(z) \exp(ik(x - ct))$$



- $\Rightarrow f(z) = f_0 \exp\left(-k\left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} z\right) + f_1 \exp\left(+k\left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} z\right)$

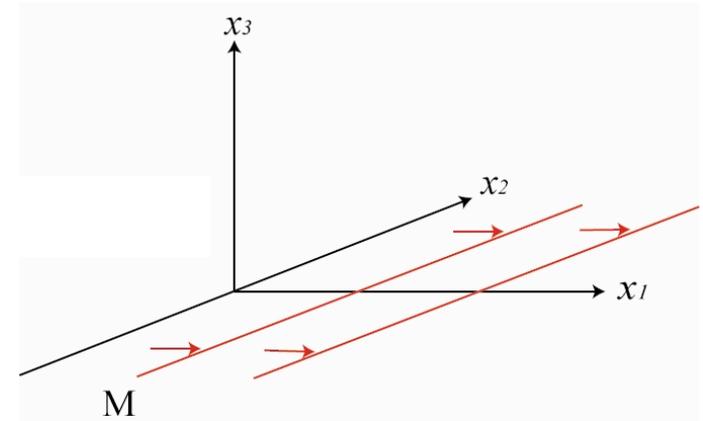
$$\Rightarrow g(z) = g_0 \exp\left(-k\left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} z\right) + g_1 \exp\left(+k\left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} z\right)$$

$\rightarrow g(z) \rightarrow$ Exponential decay for $z \rightarrow \infty$

$\rightarrow \left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}$ and $\left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2}$ are real numbers.

$\Rightarrow c < \alpha$ and $c < \beta$

f_1 and $g_1 = 0 \leftrightarrow f$ and $g \rightarrow 0$ for $z \rightarrow \infty$



$$\phi = f_0 \exp\left(-k\left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} z\right) \exp(ik(x - ct))$$

$$\psi = g_0 \exp\left(-k\left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} z\right) \exp(ik(x - ct))$$

Free surface condition
for $z=0$:

$$\tau_{33} = 0$$

$$\tau_{31} = 0$$

$$\tau_{32} = 0$$

$$\tau_{32} = \mu \varepsilon_{32} \leftarrow u_2 = 0 \quad \left(\frac{\partial \bullet}{\partial y} = 0 \right)$$

$$\tau_{31} = \mu \varepsilon_{31} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned} \tau_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} \\ &= \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{31} &= \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \phi - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \phi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \\ &= \mu \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \phi - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\tau_{33} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}$$

$$\tau_{33} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) = 0$$

$$s = \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \text{ et } r = \left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}$$

$$\tau_{31} = 0; z = 0 \Rightarrow 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2f_0(-ir) - g_0(s^2 + 1) = 0$$

$$\tau_{33} = 0; z = 0$$

$$\Rightarrow f_0(\alpha^2(r^2 - 1) + 2\beta^2) + 2\beta^2 g_0(-is) = 0$$

→ System of linear equations

$$\begin{aligned} -2ir f_0 - (s^2 + 1)g_0 &= 0 \\ (\alpha^2(r^2 - 1) + 2\beta^2)f_0 + (-2is\beta^2)g_0 &= 0 \end{aligned}$$

\exists solution , \forall amplitude \rightarrow determinant = 0

$$4rs\beta^2 = (s^2 + 1)(\alpha^2(r^2 - 1) + 2\beta^2)$$

Dispersion relation (no frequency dependence in this case)

$$\beta^2 4\left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} = \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)(\alpha^2\left(-\frac{c^2}{\alpha^2}\right) + 2\beta^2)$$

$$4\left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} = \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^2$$

$$\lambda = \mu \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 3\beta^2$$

$$4\left(1 - \frac{c^2}{3\beta^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} = \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^2$$

For an example, assume a Poisson solid ($\alpha^2/\beta^2 = 3$), so that the determinant becomes

$$(c_x^2/\beta^2)[c_x^6/\beta^6 - 8 c_x^4/\beta^4 + (56/3)c_x^2/\beta^2 - 32/3] = 0$$

This has roots $c_x^2/\beta^2 = 0, 4, 0, 2 + 2/\sqrt{3} (\approx 3.155), 2 - 2/\sqrt{3} (\approx 0.845)$.

Only the last root satisfies $c_x < \beta$, the condition for waves to be trapped at the surface.

The apparent velocity of the Rayleigh wave in a halfspace that is a homogeneous Poisson solid is $c_x = (2 - 2/\sqrt{3})\beta = 0.92 \beta$, slightly less than the shear velocity.

Figure 2.7-5: Rayleigh wave displacements as a function of depth.

$$u_x = Ak_x \sin(\omega t - k_x x) [\exp(-0.85 k_x z) - 0.58 \exp(-0.39 k_x z)]$$

$$u_z = Ak_x \cos(\omega t - k_x x) [-0.85 \exp(-0.85 k_x z) + 1.47 \exp(-0.39 k_x z)]$$

At the surface, $z = 0$:

$$u_x = 0.42 Ak_x \sin(\omega t - k_x x)$$

$$u_z = 0.62 Ak_x \cos(\omega t - k_x x)$$

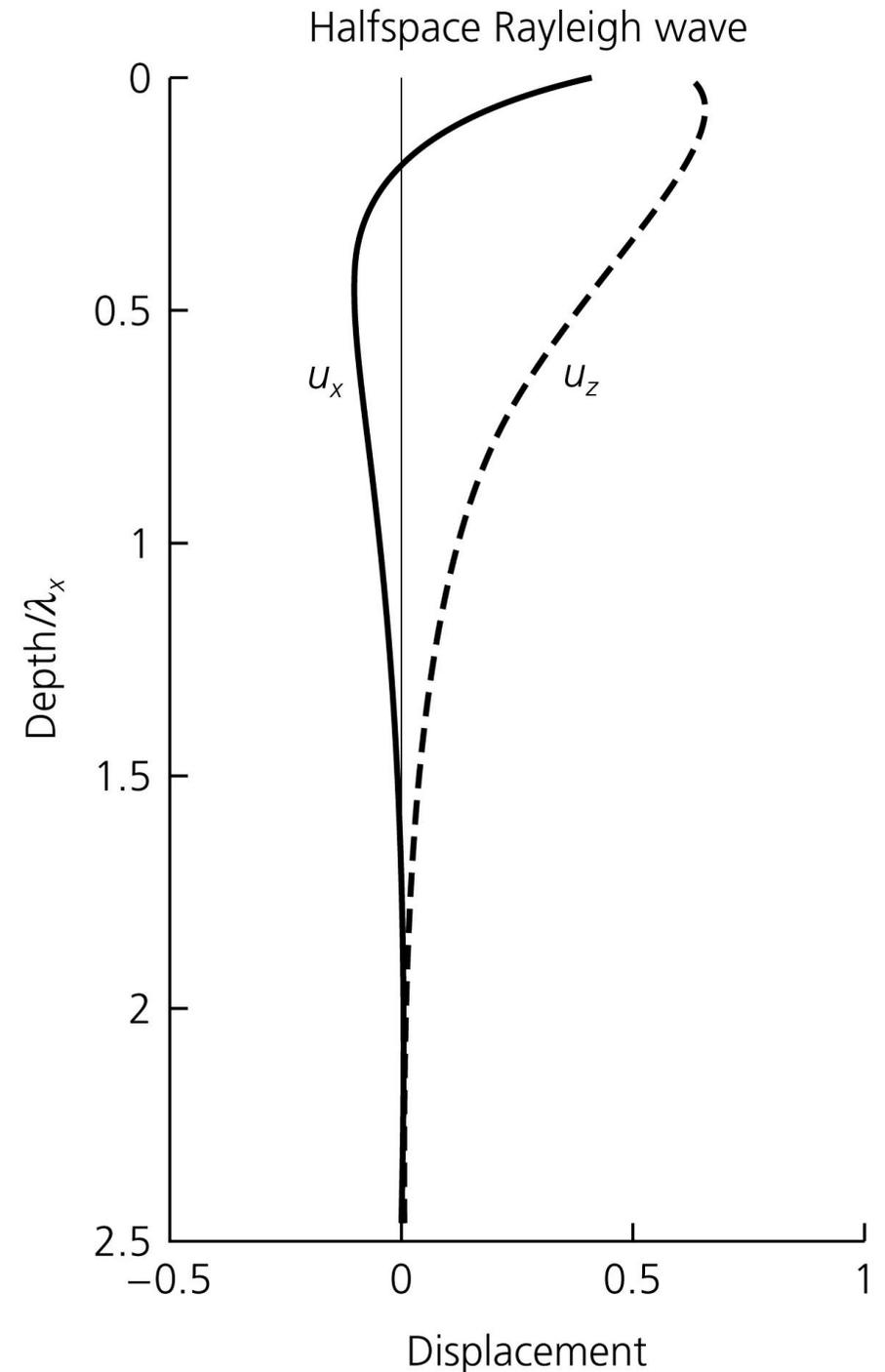
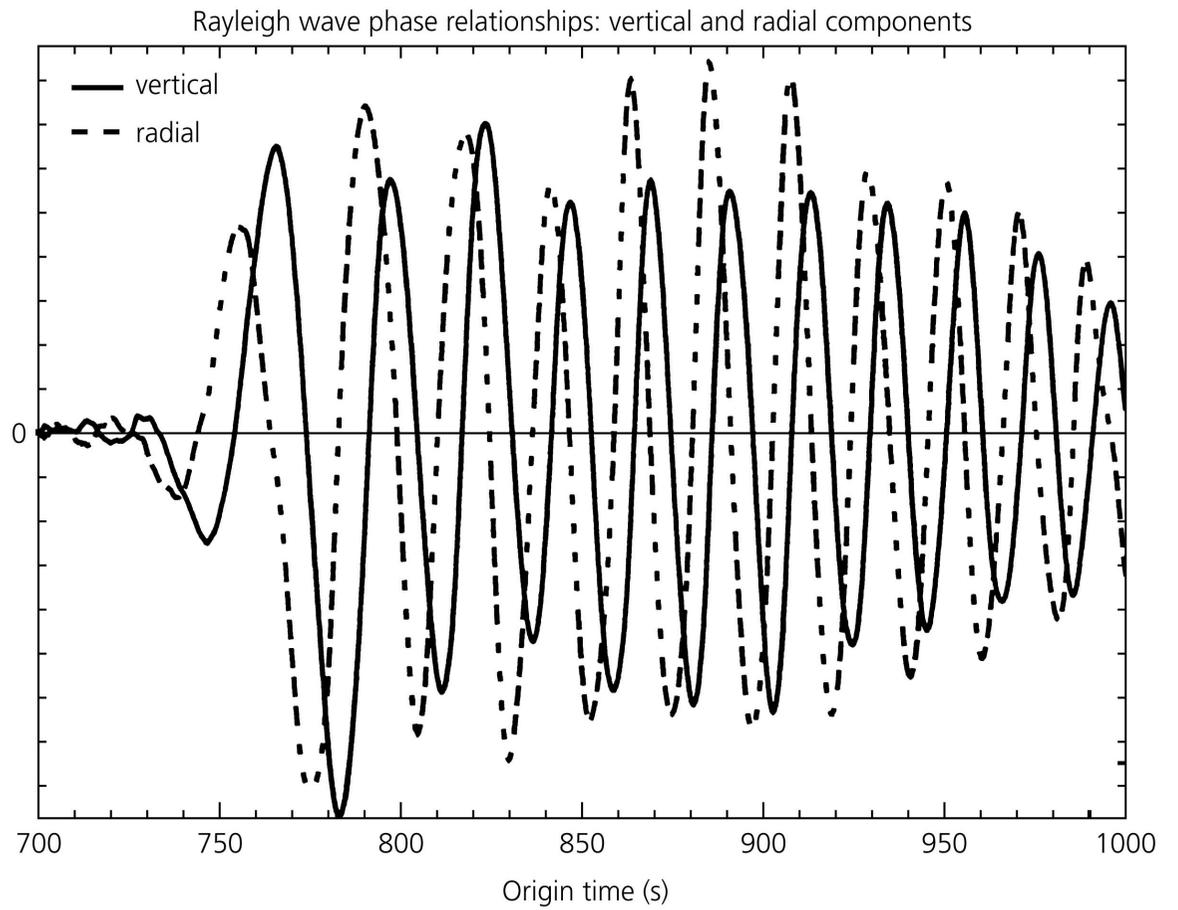
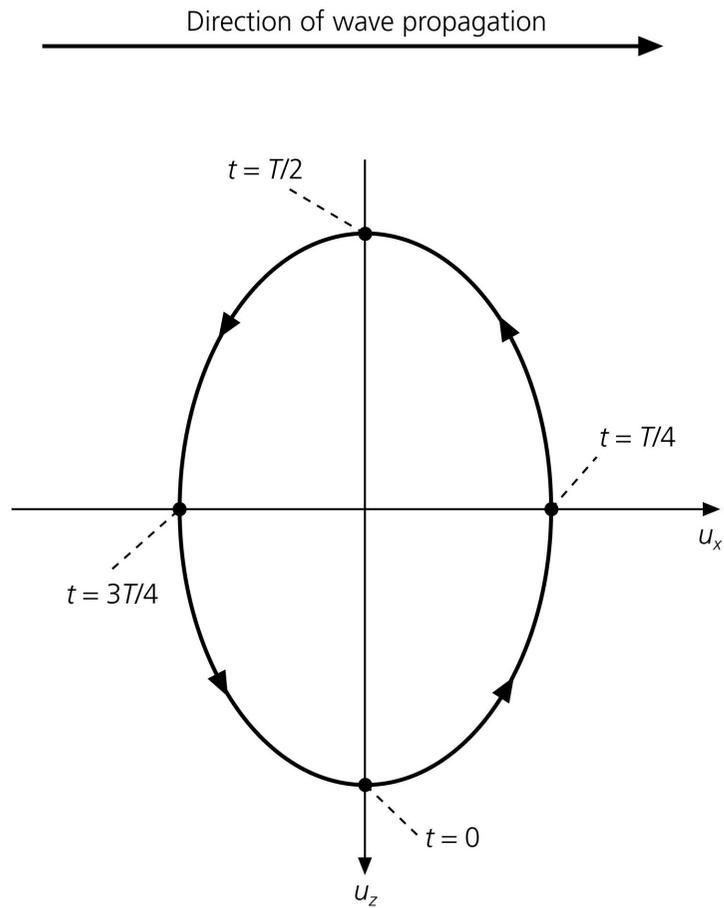


Figure 2.7-6: Horizontal and vertical Rayleigh wave motions.



Half space Green function

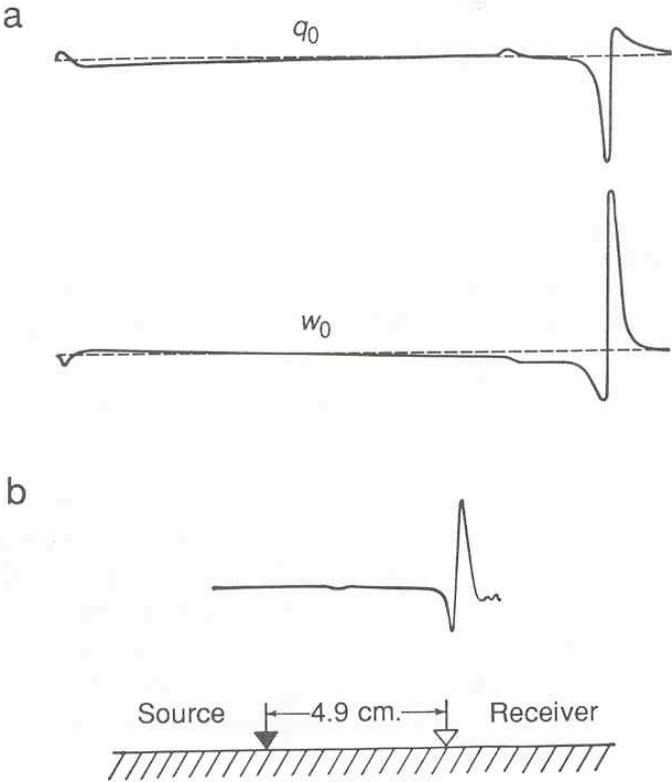


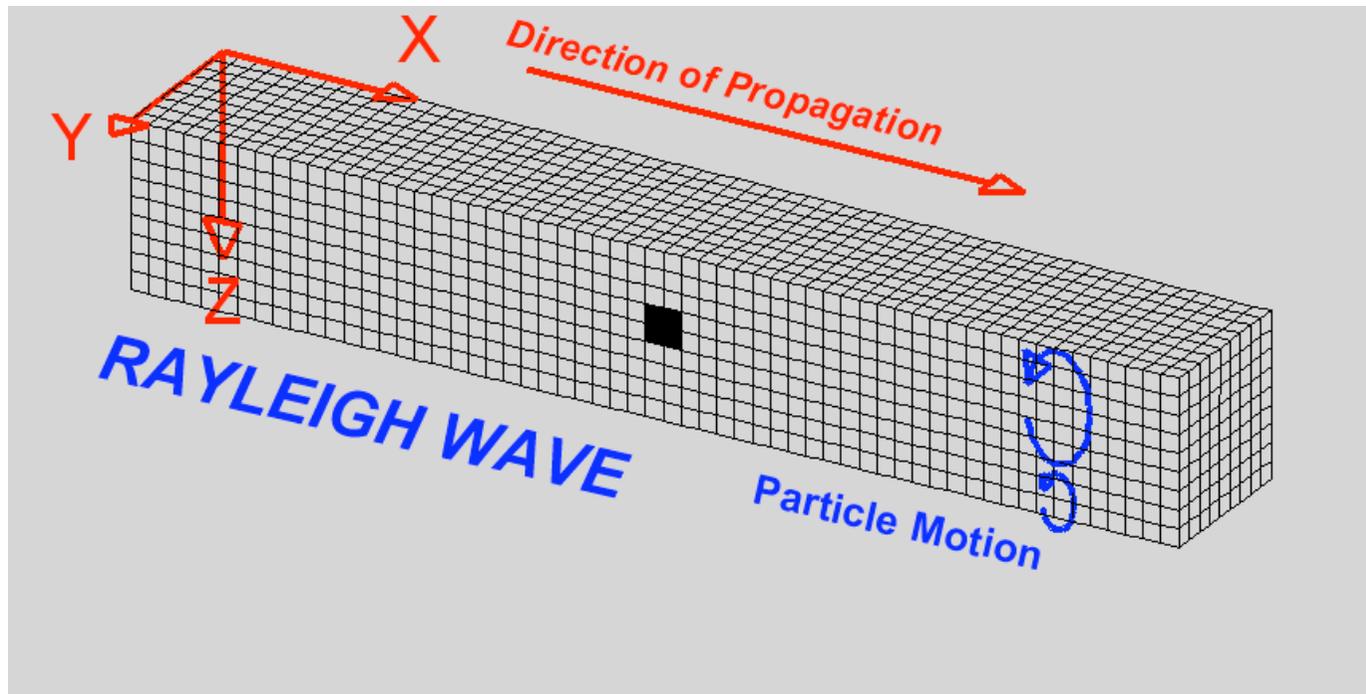
FIGURE 4.B1.1 (a) Radial (q_0) and vertical (w_0) surface ground motions calculated by Lamb (1904) for an impulsive vertical force on the surface. (b) An experimentally recorded vertical ground motion for a vertical point source. The largest motion in each case corresponds to the undispersed Rayleigh pulse. (From Ewing *et al.*, 1957).

On montre avec les mêmes équations que le mouvement d'une particule en surface s'écrit :

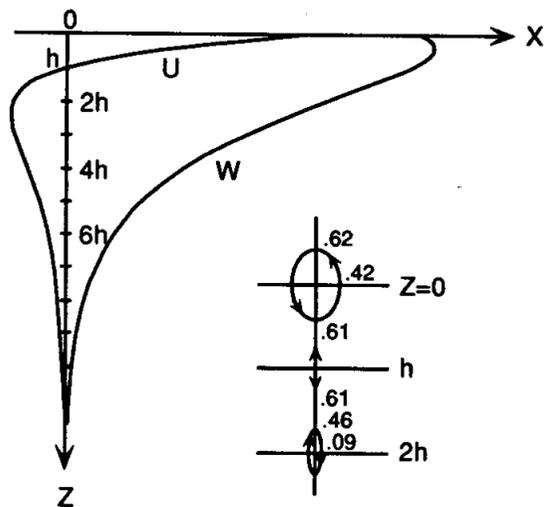
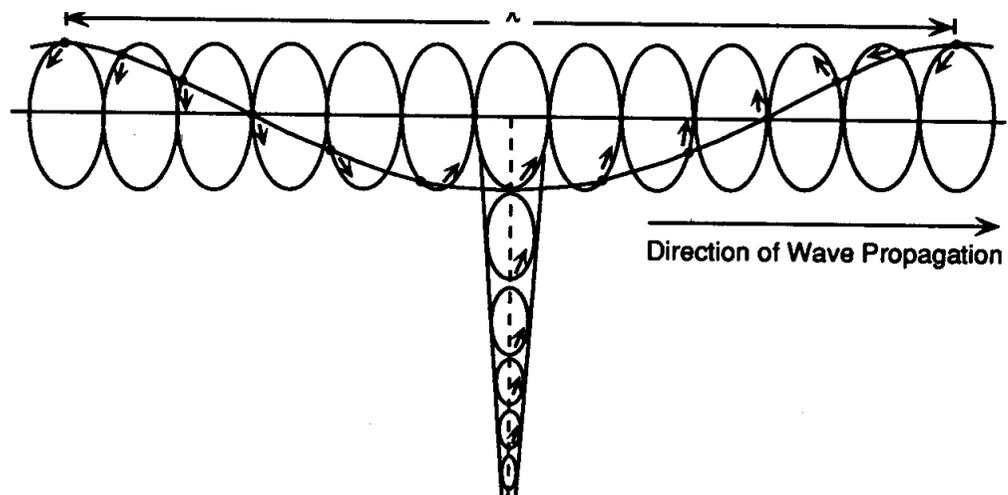
$$\begin{aligned} u &= \alpha \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) && \text{horizontal} \\ u &= \beta \cos(\omega t) && \text{vertical} \end{aligned}$$

⇒ une particule décrit une ellipse dans le sens rétrograde.

$$\beta/\alpha \sim 1.48$$

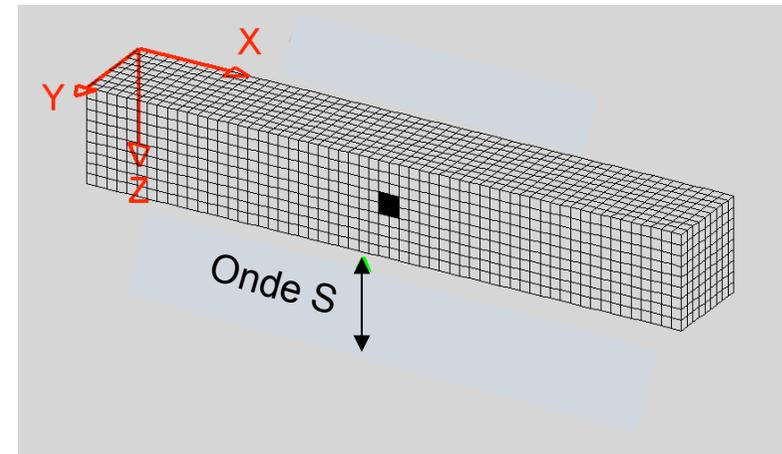
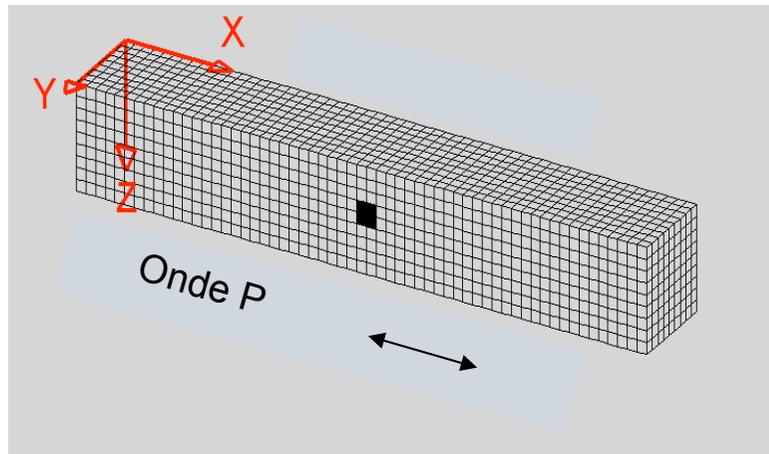


En profondeur, les deux composantes du mouvement évoluent différemment.

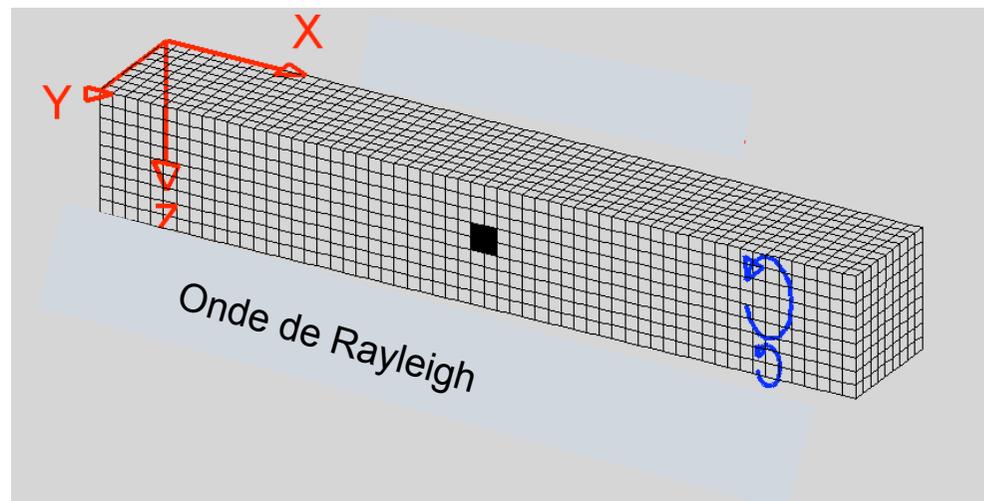


Ondes sismiques

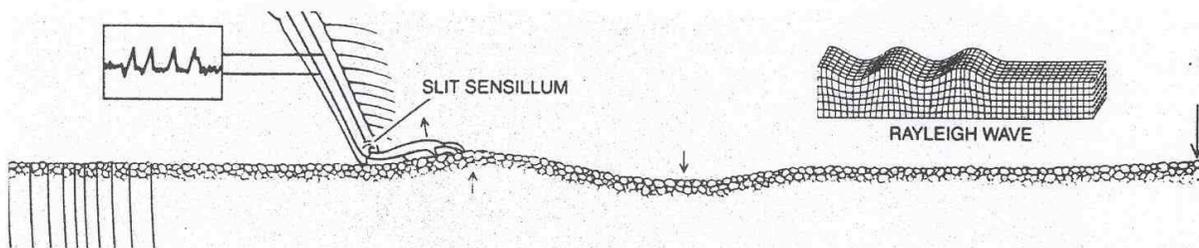
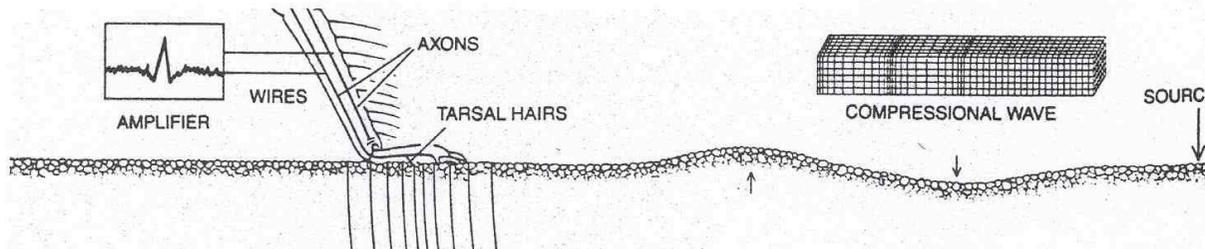
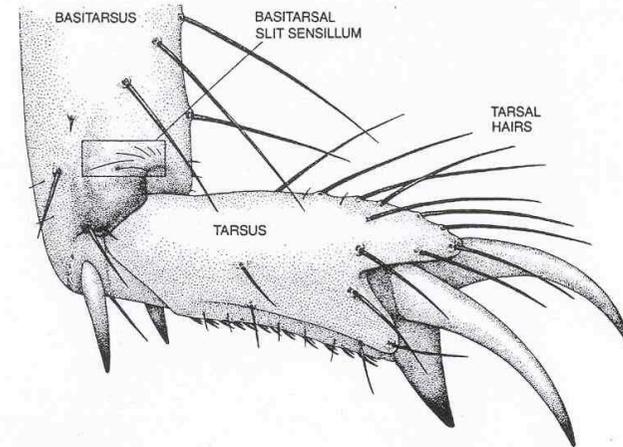
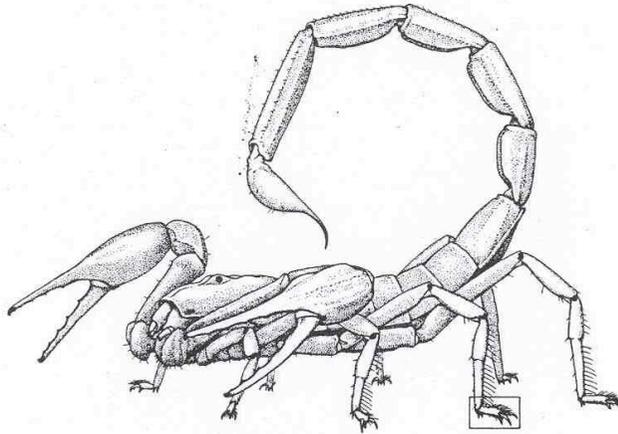
Ondes de volume P et S



Ondes de surface: ondes de Rayleigh



Sand Scorpion's Seismic Processing



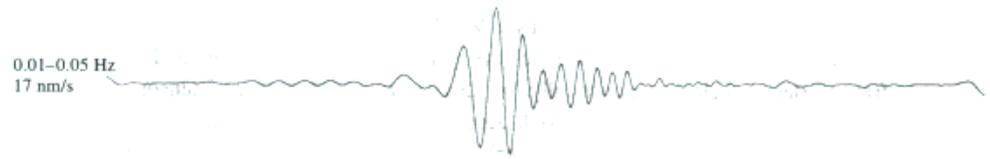
P.H. Brownell, Prey Detection by the Sand Scorpion, Scientific American, 1984.

Sand Scorpion determines prey's direction and range by separating Rayleigh and pressure waves.

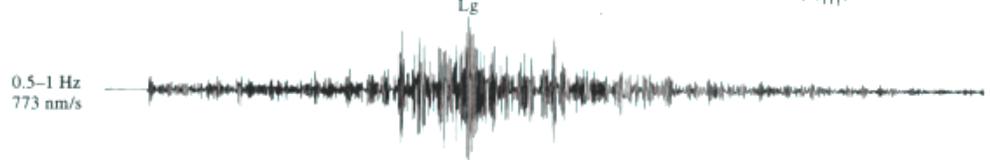
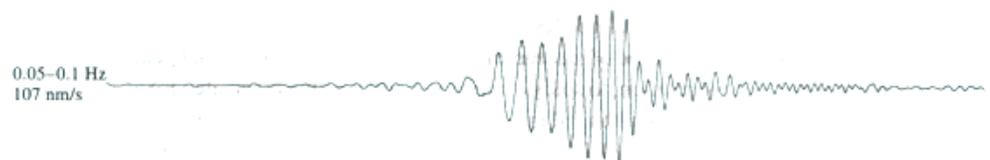
Signal large-bande



Filtrage



Grands bâtiments



Petits bâtiments

Fréquence

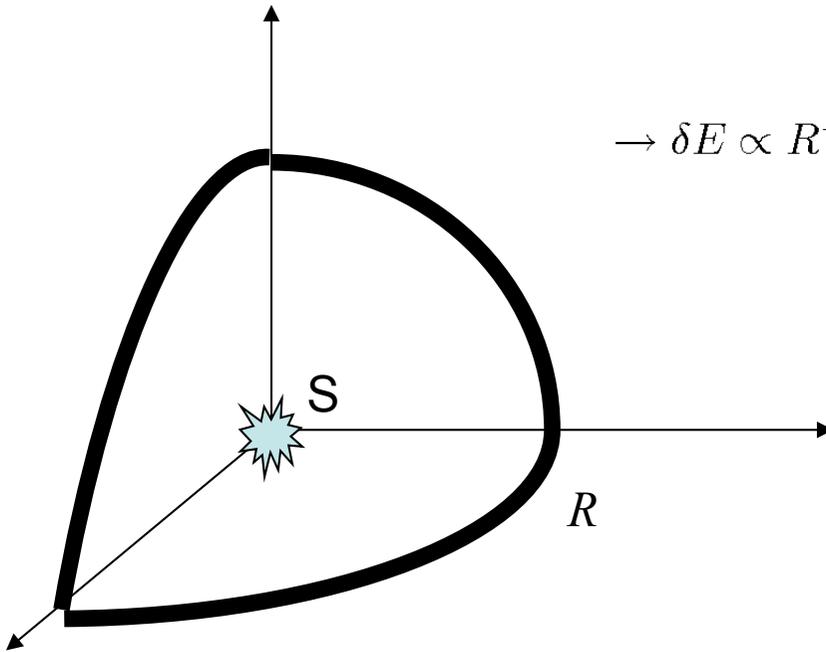
Expansion géométrique:

P et S près de la source: Onde sphérique

Densité d'énergie proportionnelle δE à $(\text{amplitude})^2 = A^2$

Energie totale conservée sur le front d'onde d'aire $4\pi R^2$

$$\rightarrow \delta E \propto R^{-2} \rightarrow A \propto R^{-1}$$



Expansion géométrique:

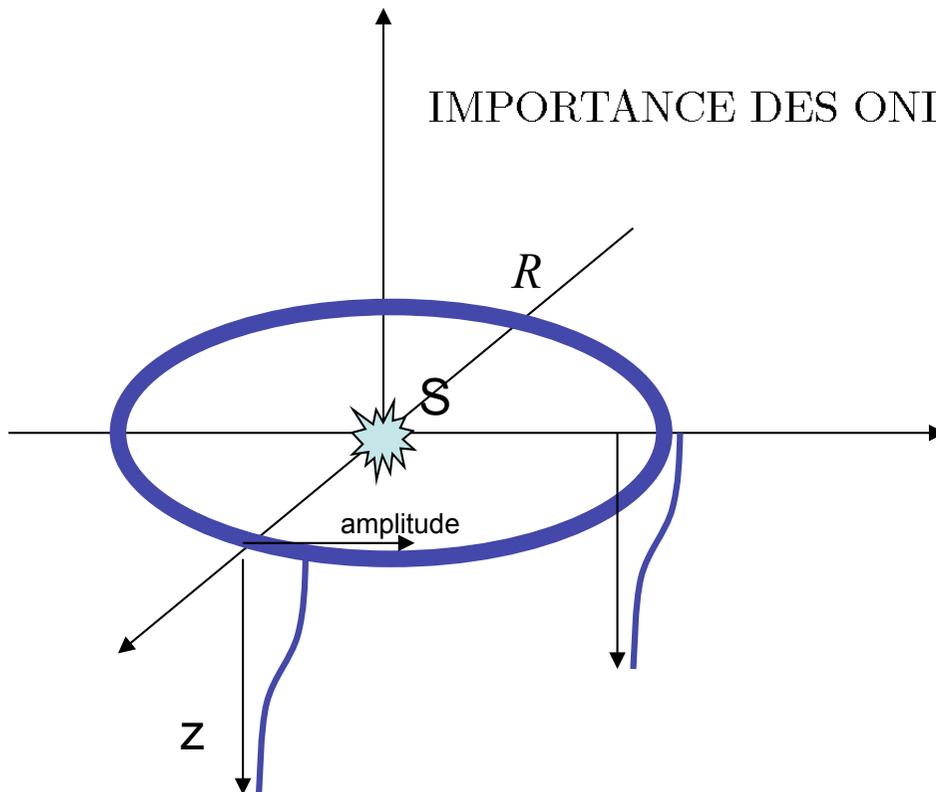
Onde de surface

Densité d'énergie proportionnelle δE à $(\text{amplitude})^2 = A^2$

Energie totale conservée confinée autour du front d'onde de périmètre $2\pi R$

$$\rightarrow \delta E \propto R^{-1} \rightarrow A \propto R^{-1/2}$$

IMPORTANCE DES ONDES DE SURFACE Á GRANDE DISTANCE



Atténuation des ondes

Expansion géométrique

Ondes de surface (milieu latéralement homogène): $1/\sqrt{r}$

Ondes de volume (milieu homogène): $1/r$

Ondes piégées, dans milieu hétérogène: plus compliqué

Diffraction et multipathing:

Redistribution de l'énergie dans l'espace et dans le temps

Atténuation intrinsèque (anelasticité)

Perte d'énergie sous forme de chaleur

Mécanismes: divers processus a très petite échelle

Atténuation des ondes

Que se passe-t-il s'il y a atténuation?

Sinusoïde non atténué au cours du temps : cas élastique

Sinusoïde atténué au cours du temps: cas anélastique.

Comment s'atténue l'onde: problème complexe, mais par analogie avec un ressort amorti, on peut considérer l'atténuation avec le temps comme une multiplication de la sinusoïde par une exponentiel $\exp(-bt)$

(fig 3.7-11).

$\mathbf{u(t)=Aexp(i\omega_0 t-ikx)}$: cas élastique

$\mathbf{u(t)=Aexp(i\omega_0 t-ikx)exp(-bt)}$: cas anélastique

$\mathbf{u(t)=Aexp(i(\omega_0+ib)t-ikx)}$: atténuation -> fréquence complexe!

On utilise habituellement le paramètre Q pour décrire l'atténuation:

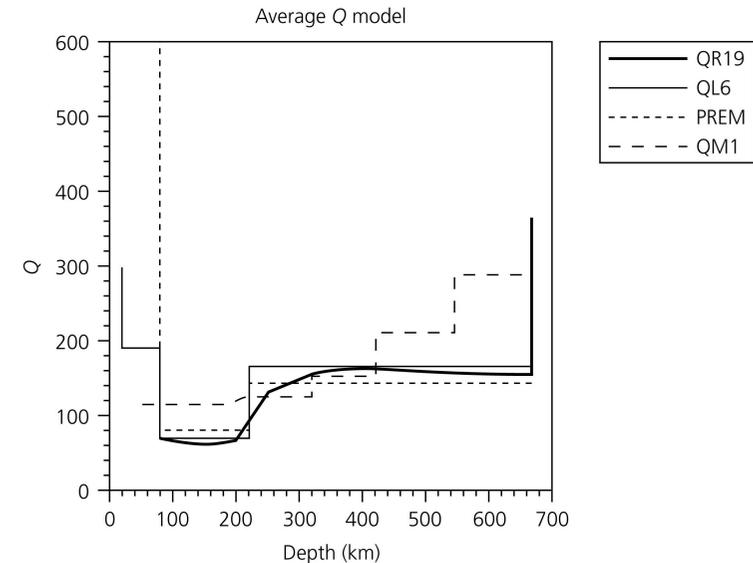
$$Q=\omega_0/(2b)$$

Atténuation des ondes

Q : facteur de qualité

- On peut exprimer Q par $1/Q = -\Delta E / (2\pi E)$, ou ΔE est le changement d'énergie sur une période T ou une longueur d'onde λ
- Ondes propagatives: $A(x, \omega) = A_0 \exp[-\omega x / (2cQ(\omega))]$
- Plus Q est petit, plus le milieu est atténuant
- Peut être dépendant de la fréquence
 $Q = Q(f) = Q_0(f - f_0)^a$
- Dépend du matériaux et de son état:
information utile
- Dépend du type d'onde (P, S, surface, Lg, ...)
- Difficile a mesurer
- $Q \Rightarrow$ dispersion de la vitesse des ondes. Cette dispersion est mal connue. Une dispersion possible est $c(\omega) = c(\omega_0) [1 + \ln(\omega / \omega_0) / (\pi Q)]$

Figure 3.7-19: Models of upper mantle attenuation.



Stein and Wysession