

THESE

Présentée par

Franck PLUNIAN

Ingénieur Ecole Centrale de Paris

pour obtenir le titre de DOCTEUR

de L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
GRENOBLE

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité: MECANIQUE

Etude de l'Effet Dynamo dans le coeur du réacteur Phenix

Date de soutenance: 19 janvier 1996

Composition du jury:

M.	R.	MOREAU	Président
M.	G.	GERBETH	Rapporteurs
M.	J.	LEORAT	
M.	J.P.	GIRARD	Examineurs
M.	A.	ALEMANY	
M.	P.	MARTY	
M.	P.	MASSE	

Thèse préparée au sein du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels

*Vive pensée
A celle dont
Le prénom
Éclaira, de ses lettres
Rituelles et secrètes, les
Informatiques travaux
Et résultats de cette thèse.*

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire s'est déroulé au sein de l'équipe "MHD" du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels, avec le concours de la Centrale Phenix.

Je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance à Messieurs A. ALEMANY, Directeur de Recherche au CNRS, PH. MARTY, Ingénieur de Recherche au CNRS et PH. MASSÉ, Professeur à l'INPG, qui ont assuré l'encadrement de ma thèse avec dynamisme et efficacité. Leurs conseils et appuis constants ont favorisé le bon déroulement de cette recherche.

J'adresse également mes plus vifs remerciements à Messieurs J. PH. GIRARD et G. LOYER, de la Centrale Phenix, qui ont motivé cette recherche par leurs remarques et interrogations nombreuses et pertinentes.

Je tiens aussi à remercier Monsieur R. MOREAU, Professeur à l'INPG et Membre de l'Académie des Sciences, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Je remercie également Messieurs J. LÉORAT, Directeur de Recherche au CNRS, et G. GERBETH, Directeur de Recherche à Rössendorf, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail et le temps qu'ils ont consacré à la lecture du manuscrit.

Je remercie R. BLANPAIN, Chef du Service CSME au LETI-CEA GRENOBLE, d'avoir mis à ma disposition les moyens informatiques nécessaires à la réalisation d'une partie de ma thèse. La sympathie des membres de son service m'a permis de travailler efficacement et dans un climat agréable. Je les en remercie, et plus particulièrement J.J. CHAILLOUT pour ses conseils informatiques avisés.

Je remercie L. RAHMANY du CLI / EDF pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de mon travail.

L'esprit d'équipe n'est pas un vain mot lorsque celle-ci est MHD. Que tous ses membres en soit chaleureusement remerciés.

Enfin, que toutes les personnes de mon entourage qui, par leur aide ou leur sympathie, m'ont permis de travailler dans un climat agréable, reçoivent l'expression de ma gratitude.

Sommaire

Nomenclature	15
Figures	17
Tableaux	22
PREMIERE PARTIE: Introduction	23
I- Contexte Général	27
I-1. L'effet dynamo au carrefour de plusieurs disciplines	27
I-1a. La géophysique	27
I-1b. L'astrophysique	28
I-1c. La magnétohydrodynamique	29
I-2. L'effet dynamo, phénomène d'intérêt nucléaire	30
I-2a. Les Réacteurs à Neutrons Rapides	30
I-2b. Objectif de la thèse	31
I-2c. Travail effectué	32
II- Théorie et Expérience	33
II-1. Analogie électromécanique	33
II-1a. La dynamo-disque homopolaire de Bullard	33
II-1b. La dynamo-disque couplée de Rikitake	35
II-2. Formulation mathématique	36
II-2a. Définition de l'effet dynamo cinématique	36
II-2b. Equations de Navier-Stokes	37
II-2c. Equations de Maxwell	37
II-2d. Loi d'Ohm	37
II-2e. Equation de l'induction	38
II-2f. Description cinématique et dynamique	39
II-2g. Nombre de Reynolds magnétique	40
II-2h. Hélicité cinématique	41
II-2i. Théorèmes anti-dynamo	41
II-3. Mécanismes fondamentaux	43
II-3a. Rotation différentielle	43
II-3b. Effet α	45
II-3c. Illustrations de l'effet dynamo	48
II-4. Travaux expérimentaux	49
II-4a. Ecoulement hélicoïdal	49
II-4b. Ecoulement périodique	50

III- Etudes antérieures concernant l'Effet Dynamo dans les Réacteurs à Neutrons Rapides	51
III-1. Description d'un Réacteur à Neutrons Rapides (RNR)	52
III-1a. L'intérêt d'un RNR	52
III-1b. Deux concepts de RNR	53
III-1c. RNR Phenix	54
III-1d. Le coeur du réacteur	55
III-2. Zones du réacteur susceptibles de générer de l'effet dynamo	58
III-2a. Bilan comparatif des 4 zones pour Phenix et Superphenix	58
III-2b. Le sommier	59
III-2c. Les pompes des circuits primaire et secondaire	60
III-2d. Le coeur du réacteur	62
III-2e. Bilan des essais entrepris sur les RNR	62
III-3 Mesures sur BN600	64
III-3a. Description du dispositif expérimental	64
III-3b. Interprétation des résultats	65
III-4. Mesures sur Phenix (expérience Héliopolis)	70
III-4a. Description du dispositif expérimental	70
III-4b. Interprétation des résultats	70
III-5. Mesures sur Superphenix	71
III-5a. Description du dispositif expérimental	71
III-5b. Interprétation des résultats	71
Annexe 1.A "A modified version of the Rikitake dynamo"	73
Annexe 1.B Décomposition poloïdale-toroïdale d'un champ de vecteur conservatif	93
Annexe 1.C Evaluation du nombre de Reynolds magnétique pour Phenix et Superphenix	95

DEUXIEME PARTIE: Analyse de stabilité temporelle de l'induction magnétique dans le coeur d'un RNR 99

I- Hypothèses de modélisation	101
I-1. L'écoulement	102
I-1a. Ecoulement autour d'une aiguille	102
I-1b. Ecoulement dans un assemblage	103
I-2. Propriétés électromagnétiques	106
I-3. Les paramètres de contrôle	107
II- Résolution	109
II-1. Analyse préliminaire	109
II-1a. Changement de repère	109
II-1b. Le problème adimensionnel	111
II-2. La méthode de résolution	112
II-2a. Approximation au 1er ordre en k	112
II-2b. Décomposition spectrale	113
II-2c. Troncature et convergence	114
III- Résultats et interprétation	115
III-1. Taux d'accroissement	116
III-1a. Influence du débit	116
III-1b. Influence de la perméabilité	117
III-2. Courbes neutres	118
III-3. Allures géométriques des solutions	120
III-3a. Lignes de champ magnétique	120
III-3b. Lignes de densité de courant	121
III-3c. Interprétation qualitative des résultats	122
III-3d. Nuage anti-dynamo	123
III-4. Interaction entre petite et grande échelle	124
III-4a. Equation de l'induction moyennée	124
III-4b. Advection différentielle	125
III-4c. Effet α	126
III-4d. Mécanisme d'auto-amplification du champ magnétique	127

IV- Conclusion	129
IV-1. Résultats de l'analyse de stabilité temporelle	129
IV-1a. Sans assemblages ferromagnétiques	129
IV-1b. Avec 9.6% d'assemblages ferromagnétiques	129
IV-1c. Mécanisme d'auto-amplification	129
IV-2. Limites de l'étude	130
IV-2a. Influence de modes horizontaux rationnels	130
IV-2b. Influence de l'aspect fini en hauteur de la géométrie réelle	130
IV-2c. Influence du nombre fini d'assemblages	131
IV-2d. Influence de la protection neutronique latérale	131
IV-2e. Influence de la distribution discrète et non symétrique des assemblages ferromagnétiques	131
IV-3. Conclusions	131
Annexe 2.A Calcul de la perméabilité moyenne du coeur lorsque 9.6% des assemblages sont ferromagnétiques	133
Annexe 2.B Calculs menant aux équations moyennées vérifiées par l'induction	134

TROISIEME PARTIE: Modélisation de l'Effet Dynamo cinématique par la méthode des Eléments Finis. Application au coeur du RNR Phenix. 135

I- Hypothèses 137

I-1. Modélisation de l'écoulement 137

- I-1a. Préliminaires 137
- I-1b. Méthode 138
- I-1c. Ecoulement autour d'une aiguille 139
- I-1d. Interprétation des résultats de l'étude CEA (ass. à 19 aiguilles) 140
- I-1e. Caractéristiques de l'écoulement dans un assemblage à 217 aiguilles 141
- I-1f. Modélisation de l'écoulement dans le coeur 141

I-2. Propriétés électromagnétiques 143

- I-2a. Conductivité électrique 143
- I-2b. Perméabilité magnétique 144
- I-2c. Ceinture ferromagnétique 144
- I-2d. Assemblages ferromagnétiques 145

II- Modélisation 149

II-1. Préliminaires 150

- II-1a. Pourquoi les éléments finis? 150
- II-1b. Minimisation d'une fonctionnelle 151
- II-1c. Méthode projective 152
- II-1d. Interpolation de l'inconnue 152
- II-1e. Fonctions d'interpolation de la géométrie curviligne 153
- II-1f. Forme forte. Forme faible 153

II-2. Le modèle en B 154

- II-2a. Forme forte 154
- II-2b. Forme faible 154

II-3. Le modèle en (A, W) 155

- II-3a. Forme forte 155
- II-3b. Forme faible 156

II-4. Intégration numérique 157

- II-4a. Choix des fonctions test β_i et α_i et d'interpolation β_j et α_j 157
- II-4b. Choix du degré des β_j et α_j pour chaque composante de l'inconnue 157
- II-4c. Choix du degré des fonctions de projection test β_i et α_i 157
- II-4d. Degré des polynômes de Lagrange 158
- II-4e. Fonctions d'interpolation des géométries curvilignes 158
- II-4f. L'intégration numérique 158

II-5. Résolution, stabilité et précision 160

- II-5a. Résolution 160
- II-5b. Stabilité 160
- II-5c. Précision 161

II-6. Conclusion 161

III- Validation	163
III-1. Fil parcouru par un courant continu ou alternatif	164
III-1a. Description du problème	166
III-1b. Modélisation par les éléments finis	165
III-1c. Résultats	166
III-2. Diffusion instationnaire d'un champ magnétique	167
III-2a. Description du problème	167
III-2b. Modélisation par les éléments finis	168
III-2c. Résultats	168
III-3. Problème de Parker (Parker2D)	169
III-3a. Description du problème	169
III-3b. Modélisation par les éléments finis	169
III-3c. Résultats	171
III-4. Ecoulement de Ponomarenko (Ponomarenko3D)	173
III-4a. Description du problème	173
III-4b. Résultats antérieurs	174
III-4c. Modélisation par les éléments finis	175
III-4d. Résultats	177
III-4e. Tests numériques	182
III-5. Expérience de Gailitis (Gailitis3D)	187
III-5a. Description du problème	187
III-5b. Modélisation par les éléments finis	188
III-5c. Résultats	190
IV- Simulation du coeur de Phenix	193
IV-1. Réseau homogène	194
IV-1a. Modélisation par les éléments finis	194
IV-1b. Résultats	195
IV-2. Réseau hétérogène	201
IV-2a. Modélisation par les éléments finis	201
IV-2b. Energie électromagnétique	203
IV-2c. Forces électromagnétiques	205
V- Conclusion	209
V-1. Résultats de l'étude	209
V-1a. Sans assemblage ferromagnétique	209
V-1b. Avec 17 assemblages ferromagnétiques	210
V-2. Perspectives	211
V-2a. Modélisation du coeur	211
V-2b. Outil de simulation de l'effet dynamo	211
Annexe 3.A Données pour un assemblage à 19 et 217 aiguilles	213
Annexe 3.B Intégrants de la formulation en potentiels (A, W)	214
Annexe 3.C Contrainte numérique d'un problème diffusio-convectif	215

Conclusion	217
I- Résumé de la thèse	219
I-1. Introduction (Première partie)	219
I-2. Etude de stabilité temporelle (Seconde partie)	220
I-3. Modélisation de l'effet dynamo par la méthode des Eléments Finis (Troisième partie)	221
II- Perspectives	222
Références	223
Bibliographie supplémentaire	229

Nomenclature

Symbole	Unité	Définition
A	$V.s.m^{-1}$	Potentiel vecteur
B	T	Induction magnétique
b	T	Induction magnétique exprimée à l'aide des coordonnées adimensionnelles: $\mathbf{b}(x, y, z, \tau) = \mathbf{B}(X, Y, Z, t)$
d	m	Pas du fil espaceur d'une aiguille combustible
E	$V.m^{-1}$	Champ électrique
\mathcal{E}	$V.m^{-1}$	Champ électromoteur moyen
E_{mag}	J	Energie magnétique
H	T	Champ magnétique
h	T	Défini par $\mathbf{b}(x, y, z, \tau) = \mathbf{h}(x, y).exp(p \tau + ikz)$
H_D	m	Hauteur du domaine d'étude
\mathcal{H}	$m^3.s^{-2}$	Hélicité linéique (dans le sens axial) d'un écoulement
j	$A.m^{-2}$	Densité de courant électrique
k	****	Nombre d'onde axial
L	m	Longueur caractéristique
l_1, l_2	****	Vecteurs de périodicité de la disposition des assemblages
n		Vecteur normal extérieur à une surface
p	****	$Re(p)$ =taux d'accroissement de l'induction magnétique $Im(p)$ =pulsation de l'induction magnétique
R	m	Rayon (du cylindre, de l'assemblage, ...)
R_e	****	Nombre de Reynolds
R_D	m	Rayon ou demi-côté du domaine d'étude
R_m	****	Nombre de Reynolds magnétique
r, θ, z	m	Coordonnées cylindriques
r, θ, ϕ	m	Coordonnées sphériques
T	°C (ou °K)	Température
V	$m.s^{-1}$	Champ de vitesse
v	****	Champ de vitesse adimensionnel
W	V.s	Intégrale temporelle du potentiel électrique
X, Y, Z	m	Coordonnées cartésiennes
x, y, z	****	Coordonnée cartésiennes adimensionnelle

α_i		fonction vectorielle test
α_j		fonction vectorielle d'interpolation
β_i		fonction scalaire test
β_j		fonction scalaire d'interpolation
(Γ)		Frontière géométrique du domaine d'étude
Δt	s	pas de temps
ϕ	V	Potentiel électrique
λ	$m^2 \cdot s^{-1}$	Diffusivité magnétique ($=1 / \sigma\mu$)
μ	$H \cdot m^{-1}$	Perméabilité magnétique
ν	$m^2 \cdot s^{-1}$	Viscosité cinématique
σ	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	Conductivité électrique
τ	****	temps adimensionnel
(Ω)		Domaine géométrique d'étude
ω	rad.s-1	Vitesse angulaire
χ	****	Paramètre de vissage d'un écoulement

Indices

cyl	cylindrique
in	intérieur
ext	extérieur
m	mode en x (en cartésiennes) ou en θ (en cylindriques)
n	mode en y de l'induction magnétique

Figures

Fig.		N° de page
1.1-	Inversions du champ dipolaire terrestre au cours des 4.10^6 dernières années.	27
1.2-	Cheminement du pôle Nord du dipôle terrestre au cours de l'inversion de Steen Mountains.	28
1.3-	Coupe longitudinale nord-sud de la tranche de SuperPhenix à Creys-Malville	30
1.4-	Structures internes du réacteur à neutrons rapides SuperPhenix.	31
1.5-	Exemple de système dynamo: Dynamo-disque homopolaire de Bullard.	33
1.6-	Dynamo-disque de Rikitake	35
1.7-	Dynamo-disque de Rikitake :Evolution adimensionnelle de I_1 en fonction du temps	35
1.8-	Schématisation des formulations mathématiques de l'effet dynamo dynamique	39
1.9-	Classification en fonction de Re et Rm .	40
1.10-	Schéma de l'expérience de Kolm et Mawardi.	42
1.11-	Décomposition poloïdale et toroïdale de \mathbf{B} dans le cas axisymétrique.	43
1.12-	Action qualitative de la rotation différentielle.	44
1.13-	Vérification expérimentale de l'entretien d'une composante magnétique toroïdale à partir d'un champ magnétique poloïdal, par rotation différentielle.	44
1.14-	Cycle complet d'entretien du champ magnétique moyen pour un écoulement à plusieurs échelles.	46
1.15-	Boucle formée par torsion d'une ligne de champ magnétique, illustrant l'effet α .	46
1.16-	Vérification expérimentale de l'effet α .	47
1.17-	Illustration d'une dynamo convecto-diffusive en trois étapes: étirement, pincement, séparation	48
1.18-	Illustration du mécanisme étirement - torsion - pliage.	48
1.19-	Ecoulement de Ponomarenko.	49
1.20	Expérience de dynamo hélicoïdale en cours de réalisation à Riga.	49
1.21-	Ecoulement périodique dynamo	50
1.22-	Géométrie de l'expérience en cours de réalisation à Karlsruhe, Allemagne.	50
1.23-	Bloc réacteur de type intégré	53
1.24-	Schéma de principe d'une centrale nucléaire avec réacteur à neutrons rapides	54
1.25-	Schéma du coeur de Phenix	55
1.26-	Assemblage combustible contenant 217 aiguilles pour Phenix et 271 pour Superphenix	56

1.27-	Mise en place d'une tuyauterie de liaison entre pompe primaire et sommier.	59
1.28-	Schéma d'une pompe primaire de Superphenix.	60
1.29-	Illustration de l'effet dynamo dû à un écoulement dans un convergent.	61
1.30	Essais sur BN600.	64
1.31-	Equivalent thermoélectrique du bloc réacteur.	65
1.32-	Ecoulement secondaire dans le sommier provoqué par refoulement dissymétrique des pompes	67
1.33-	Mécanisme de génération de champ magnétique dans le sommier	68
1.34-	Implantation des bobines (expérience Héliopolis)	70
1.35-	Montage expérimental réalisé pour la mesure des perturbations magnétiques au voisinage des pompes secondaires de SuperPhenix	71
1.36-	Décomposition poloidale- toroïdale d'un champ de vecteur conservatif axisymétrique	93
2.1-	Disposition des assemblages dans le coeur	101
2.2-	Une aiguille contenant les éléments combustibles, entourée du fil espaceur permettant l'écoulement de sodium à sa périphérie.	102
2.3-	Organisation de l'écoulement transverse V_T par rapport à l'écoulement axial V_A , pour un assemblage comportant 19 aiguilles.	103
2.4-	Comparaison entre la géométrie réelle (a) et la représentation choisie (b).	104
2.5-	Repères \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2	109
2.6-	Réseau orthogonal obtenu après changement de repère.	110
2.7-	Illustration du champ de vitesse (2.2)	111
2.8-	Taux d'accroissement en fonction du nombre d'onde, pour différents débits.	116
2.9-	Taux d'accroissement en fonction du nombre d'onde, pour différentes perméabilités.	117
2.10-	Courbes neutres pour $k=0.19$, correspondant à une hauteur $h=2m$. L'amplification au-dessus de la courbe est donnée en fonction des 3 paramètres de contrôle.	118
2.11-	Courbe neutre pour l'écoulement dans le coeur	119
2.12-	Section horizontale dans une cellule. (bx, by)- Allure du champ magnétique horizontal. (bz)- Isovaleur du champ magnétique axial. (mod(b))- Isovaleurs du module de \mathbf{b} .	120
2.13-	Section horizontale dans une cellule: (jx, jy)- Allure de la densité de courant horizontale. (jz)- Isovaleur de la densité de courant axiale. (mod(j))- Isovaleurs du module de \mathbf{j} .	121
2.14-	Effet dynamo généré par un réseau de vortex, illustré en 3 étapes.	122

2.15- Nuage anti-dynamo.	123
2.16- Mécanisme d'advection différentielle	125
2.17- Mécanisme d'effet α	126
2.18- Solution en champ magnétique, périodique en z, dans une cellule	127
2.19- Fonction périodique avec effets de bords	130
3.1- Organisation de l'écoulement transverse V_T par rapport à l'écoulement axial V_A , pour un assemblage comportant 19 aiguilles [Lafay et al 1975].	138
3.2- Deux aiguilles voisines, entourées de leur fil espaceur respectif. Vue en section droite	139
3.3- Répartition des $(\chi_i)^{-1}$ dans un assemblage à 19 aiguilles	140
3.4- Répartition en hauteur de l'écoulement dans chaque assemblage.	141
3.5- Loi de réfraction de l'induction	144
3.6- Répartition en couronnes du coeur de Phenix, chaque couronne C_k contenant 6k assemblage.	144
3.7- Influence d'un domaine ferromagnétique (1) sur les lignes de champ créées en (2) par un courant électrique dans un fil [Durand 1968]	145
3.8- Section d'une couronne cylindrique	145
3.9- Déformation des lignes de champ magnétique par une couronne ferromagnétique. Cas d'une source extérieure [Durand 1968]	146
3.10- Déformation des lignes de champ magnétique par une couronne ferromagnétique. Cas d'une source intérieure [Durand 1968].	147
3.11- Comparaison entre la réalité et la modélisation. La faible interaction entre le champ magnétique interne et externe (a) permet de modéliser l'assemblage dont l'enveloppe est ferromagnétique par un barreau ferromagnétique (b).	148
3.12- Eléments: (a) quadratique, (b) prismatique, (c) tétraédrique, (d) pyramidal	151
3.13- Points d'affectation des propriétés (électromagnétiques, vitesse)	158
3.14- Fil parcouru par un courant vertical: (a) Section verticale (b) Section horizontale	164
3.15- Maillage de Fil3D et Fil3Dt.	165
3.16- Fil3Dt: A_z en fonction de r pour un temps fixé fixé.	166
3.17- Profil en escalier de la densité de courant imposée dans le fil	167
3.18- Etat transitoire pendant lequel un courant induit s'oppose à celui qui lui a donné naissance.	167
3.19- Disque conducteur en rotation autour de O_z	169
3.20- Maillage de PARKER2D (Nombre d'éléments: 50054, de noeuds: 99829, degrés de liberté: 99829.	170

3.21- Essai 2: Déformation des lignes de champ magnétiques par un écoulement conducteur rotatif.	172
3.22- Ecoulement hélicoïdal dans le cylindre intérieur	173
3.23- Courbe $R_m=f(k^*)$ étant donnés: $\chi = 0.8$, $\sigma_{cyl}/\sigma_{ext}= 0.1$ et $\mu_{cyl}/\mu_{ext}= 0.1$, $m=1$. Pour $k^* = 2\pi R/H = 0.628$, on trouve $R_m^c = 5$	174
3.24- Conditions initiales schématiques pour la simulation de Ponomarenko	176
3.25- Maillage horizontal de PONOMARENKO3D dans le cas où $R_D/R = 16$, $H=10m$, $\chi=0.8$ et $R_m=7$ (Nombre d'éléments: 3944, de noeuds: 28577, de degrés de liberté: 114308)	177
3.26- L'énergie magnétique tracée en fonction du temps pour différents R_m . Pour $R_m > 5$, le taux de croissance positif témoigne d'un effet dynamo.	177
3.27- Pour $k^* = 0.628$, une évaluation du taux d'accroissement tracée en fonction de R_m donne une valeur critique d'apparition d'effet dynamo: $R_m^c = 5$	177
3.28- Dans une section droite horizontale: (en haut) Vecteur (B_x, B_y); (en bas) Isovaleurs de B_z .	178
3.29- Répartition de l'énergie magnétique de plus haute intensité (>90%). Elle est concentrée aux endroit de plus forts gradients de vitesse.	179
3.30- Répartition géographique de l'énergie magnétique entre l'intérieur du cylindre et l'extérieur. T représente la période de rotation du cylindre ($T=1.44$ s).	180
3.31- Densité d'énergie magnétique en fonction de x, avec $y=0$ et $z=5m$ (Rayon du cylindre $R=1m$).	181
3.32- Bilan des essais sur la géométrie de Ponomarenko	182
3.33- Influence des conditions initiales	184
3.34- Influence des conditions aux limites et influence du rapport d'aspect	184
3.35- Répartition de la densité d'énergie à 85% pour un écoulement à hélicité finie	185
3.36- Schéma de l'expérience menée à Riga en 1988 [Gailitis et al 1988]	187
3.37- En ordonnée: U^{-1} (resp. V^{-1}), avec U (resp. V) homogène au temps de déclin. En abscisse: R_m , proportionnel au débit.	187
3.38- Modélisation de l'expérience de Gailitis	188
3.39- Maillage GAILITIS3D: 17004 éléments, 60239 noeuds, 240956 degrés de liberté.	189
3.40- Maillage horizontal de GAILITIS3D	189
3.41- Evolution temporelle de l'énergie magnétique par région du domaine (Ω)	190
3.42- Elévation de B_z calculé dans une section droite de GAILITIS3D	191
3.43- Répartition spatiale de l'énergie magnétique (85%) selon les zones de plus grand cisaillement de vitesse	192

3.44- Evolution de l'énergie magnétique en fonction du temps pour deux conditions initiales différentes, correspondant à deux longueurs d'onde Λ différentes du champ magnétique. Le temps est donné par rapport à t_d , temps caractéristique de diffusion à l'échelle d'un assemblage ($t_d = \sigma\mu R^2 = 1.810^{-2}$).	195
3.45- Evolution temporelle de l'énergie magnétique en fonction du nombre d'assemblages ($t_d = 1.810^{-2}$).	196
3.46- Extrapolation du nombre d'assemblages nécessaires pour que le taux d'accroissement deviennent positif. Le taux d'accroissement est évalué de la même manière qu'au tableau 3.6.	197
3.47- Champ de forces électromagnétiques dans une section horizontale, pour un coeur homogène	198
3.48- Isovaleurs de B_z : le clair indique une valeur positive, le sombre une valeur négative.	199
3.49- Maillage du coeur à 91 assemblages (Nombre d'éléments 18904; de noeuds 59387; de degrés de liberté 237548).	201
3.50- Champ de vitesse dans une section horizontale (coeur hétérogène).	202
3.51- Evolution temporelle de l'énergie magnétique en fonction du temps et pour des région différentes du domaine.	203
3.52- Champ magnétique dans une section horizontale (coeur hétérogène).	204
3.53- Composante horizontale des forces électromagnétiques dans une section droite horizontale du coeur dans son ensemble	205
3.54- Composante horizontale des forces électromagnétiques dans une section droite horizontale au voisinage du milieu du coeur.	206
3.55- Composante horizontale des forces électromagnétiques dans une section droite horizontale dans la région Ouest du coeur.	207
3.56- Forces électromagnétiques dans une section droite verticale du coeur.	208

Tableaux

1.1- Paramètres caractéristiques du milieu cosmique.	29
1.2- Nombre de Reynolds magnétique pour différentes zones des réacteurs Phenix et Superphenix	58
1.3- Bilan des différentes séries de mesures MHD entreprises sur les RNR	62
1.4- Evaluation du nombre de Reynolds magnétique dans différentes zones du réacteur Phenix.	96
1.5- Evaluation du nombre de Reynolds magnétique dans différentes zones du réacteur Superphenix.	97
2.1- Données correspondant au coeur de Phenix :	105
2.2- Conductivité électrique du sodium en fonction de la température [Freedman & Robertson 1961].	107
3.1- Tests de validation de la programmation du système (3.1).	163
3.2- Paramètres retenus pour la simulation numérique de Fil3D et Fil3Dt	165
3.3- Paramètres retenus pour la simulation numérique de Tore3D.	168
3.4- Paramètres retenus pour la simulation numérique de Parker2D	170
3.5- Valeurs caractéristiques de la simulation correspondant aux figures 3.30 et 3.31.	180
3.6- Liste des essais réalisés pour des écoulements hélicitaires à hélicité infinie	183
3.7- Tableau d'équivalence entre nombre de couronnes et d'assemblages.	194
3.8- Paramètres retenus pour la simulation numérique de Phenix Homogène	194

Première partie

Introduction

- *Mais son aiguille indique le sud et non le nord!*
- *Que dis-tu?*
- *Voyez! Ses pôles sont changés.*
- (...)
- *Mais quel phénomène a pu produire ce renversement des pôles?*
- *Rien de plus simple: pendant l'orage, sur la mer Lidenbrock, cette boule de feu qui aimantait le fer du radeau avait tout simplement désorienté notre boussole!*
- *Ah, s'écria le professeur en éclatant de rire, c'était donc un tour de l'électricité?*

Jules Verne,
Voyage au centre de la Terre (1864).

¹ Dans les entrailles de la Terre

I- Contexte Général

I.1- L'effet dynamo au carrefour de plusieurs disciplines

L'étude de l'effet dynamo concerne plusieurs disciplines dont les principales sont évoquées ci-dessous.

I-a. La géophysique [Bullard & Gellman 1954] [Cardin & Zeldever 1993] [Hollerbach & Chris 1993] [Inglis 1981][Jacobs, 1987]

Einstein tenait le champ magnétique terrestre pour "l'un des six grands problèmes non résolus de la physique". Aujourd'hui, des solutions partielles sont apportées grâce en particulier aux progrès du paléomagnétisme [Bloxham & Gubbins, 1985] [Courtillet & Le Mouél 1975] [Cox 1969, 1973] [Delcourt 1990] [Laj et Mazaud 1986] [Merrill & McFadden 1995] [Valet & Meynadier 1993].

Le paléomagnétisme est une branche de la géophysique qui a pour objectif de reconstituer l'histoire du champ magnétique terrestre. Cette discipline est essentiellement fondée sur l'analyse des roches volcaniques et des couches sédimentaires qui peuvent, dans certains cas, conserver la mémoire du champ magnétique au moment de leur formation. En datant la période de cette formation, l'évolution du champ magnétique terrestre peut alors être déduite.

Le premier résultat fondamental de cette activité concerne l'âge du champ magnétique terrestre. Un calcul de diffusion ohmique élémentaire montre en effet que tout champ magnétique présent sur la Terre, compte-tenu des caractéristiques dimensionnelles et électriques de cette dernière, doit s'éteindre au bout de 10^5 ans. Or les résultats de l'étude du champ paléomagnétique montrent que ce dernier existe depuis plus de 10^9 ans. Il est donc nécessaire de faire appel à un mécanisme d'entretien du champ magnétique terrestre, pour contre-balancer la diffusion naturelle de ce dernier.

Un second résultat fondamental de l'étude du champ paléomagnétique montre que ce dernier n'a pas toujours été orienté, dans sa forme dipolaire, tel qu'on le connaît à l'époque actuelle. En effet, l'analyse paléomagnétique a révélé l'existence de renversements chaotiques du dipôle géomagnétique (avec une moyenne caractéristique de l'ordre de 10^5 années), suivis par des déflexions plus rapides (10^3 - 10^4 années) autour de l'axe de rotation terrestre.

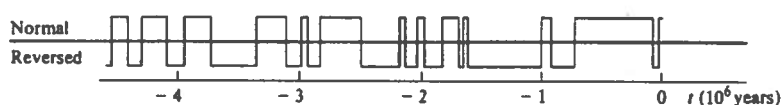


Fig. 1.1- Inversions du champ dipolaire terrestre au cours des 4.10^6 dernières années [Cox, 1969]. La figure indique seulement la direction du dipôle, non son intensité.

Seule l'hypothèse de l'effet dynamo permettrait d'expliquer à la fois l'existence du champ magnétique terrestre à long terme mais aussi les inversions de polarité du dipôle géomagnétique ainsi que ses fluctuations à une échelle de temps beaucoup plus courte. Le berceau de ce phénomène aurait lieu à la frontière extérieure de la partie liquide du noyau terrestre où des fluides de densités différentes sont animés par des forces d'origines thermiques, gravitationnelles, de Coriolis et de Laplace.

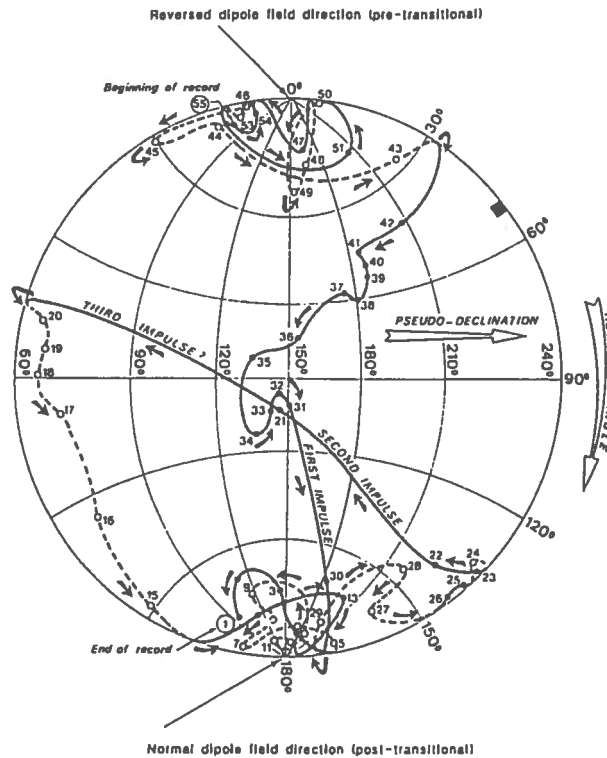


Fig. 1.2- Cheminement du pôle Nord du dipôle terrestre au cours de l'inversion de Steen Mountains, il y a 15,5 millions d'années. La durée de l'inversion est d'environ 4500 ans [Delcourt 1990].

I-1b. L'astrophysique [Léorat 1990] [Priest 1982] [Roberts P.H. 1987] [Schmitt 1992] [Zeldovitch et Al 1983]

La Terre n'est pas la seule entité astrophysique à posséder un champ magnétique et à faire appel à l'effet dynamo pour justifier l'existence de ce dernier. Il est même probable que la présence de champ magnétique relevée dans un corps cosmique soit la preuve de sa composition fluide (au moins en partie) d'une part, ainsi que de l'existence d'une zone convective d'autre part [Moffatt 1978]. Le champ d'activité de recherche actuel comprend en particulier l'étude de planètes (Jupiter, Saturne, Mercure, Mars), des étoiles (Soleil), des disques d'accrétion, des milieux interstellaires, de disques galactiques (tableau 1.1).

Ces objets sont tous animés d'un mouvement de rotation, et les champs magnétiques relevés sont de nature dipolaire. Pourtant, les vitesses ne sont généralement pas très élevées (sauf dans le cas des trous noirs), et les conductivités relativement faibles par rapport à celles des

matériaux classiques à température ambiante¹. En fait, la propension de ces objets à générer un effet dynamo réside essentiellement dans leurs dimensions qui sont en l'occurrence énormes. Le champ magnétique est alors quasi-gelé dans le fluide, et son existence principalement justifiée par la convection (même faible) de ce dernier.

	ρ g cm ⁻³	T K	Ω s ⁻¹	L cm	v cm s ⁻¹	ν cm ² s ⁻¹	ν_m cm ² s ⁻¹	Re	R_m
The Earth's liquid core	10	$4 \cdot 10^3$	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^{-2}$	$\sim 10^{-2}$	$3 \cdot 10^4$	10^9	$5 \cdot 10^2$
Jupiter's core	1	10^4	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^9$	1-10	$3 \cdot 10^{-2}$	10^4	10^{12}	10^6
Solar convection zone	10^{-3}	10^5	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{10}$	10^5	0.3	10^7	$5 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^8$
Accretion disk around black hole (Cyg X-1):									
(a) inner region, $r \sim 30r_g$	10^{-5}	$2 \cdot 10^6$	40	10^7	$5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^6$	15	10^6	$3 \cdot 10^{13}$
(b) intermediate region, $r \sim 300r_g$	10^{-6}	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^{-2}$	10^8	$5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^3$	10^{11}	10^{10}
Interstellar medium:									
(a) HI region	$2 \cdot 10^{-23}$	10^2		$3 \cdot 10^{19}$	$3 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{21}$	$5 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^3$
(b) HII region	$2 \cdot 10^{-25}$	10^4		$3 \cdot 10^{20}$	10^6	$5 \cdot 10^{18}$	$3 \cdot 10^{23}$	$5 \cdot 10^7$	10^6
(c) tunnel	$5 \cdot 10^{-27}$	10^6		$3 \cdot 10^{20}$	10^6	$3 \cdot 10^{26}$	$5 \cdot 10^{17}$	1	$6 \cdot 10^8$
Galactic gaseous disk (on average)	$2 \cdot 10^{-24}$	10^4	10^{-15}	10^{21}	10^6	$5 \cdot 10^{17}$	10^{21}	$5 \cdot 10^9$	10^6
Expanding Universe at $z = 1400$	$3 \cdot 10^{-20}$	$4 \cdot 10^3$		$4 \cdot 10^{22}$	10^6	10^{17}	$5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{11}$	10^{21}

Tab.1.1- Paramètres caractéristiques du milieu cosmique. Dans l'ordre sont représentés la densité, la température, la vitesse angulaire, le rayon de l'objet (sphère ou disque), la vitesse caractéristique, la viscosité cinématique, la diffusivité magnétique (notée ν_m au lieu de λ), les nombres de Reynolds cinématique et magnétique [Zeldovitch et Al 1983].

I-1c. La magnétohydrodynamique [Berton 1991] [Moffatt 1978] [Moreau 1990] [Shercliff 1965]

La magnétohydrodynamique consiste en l'étude des interactions entre champ magnétique et fluide conducteur de l'électricité. L'étude de l'effet dynamo en fait donc partie, au même titre que la propulsion magnétohydrodynamique, la croissance de cristaux sous champ magnétique, et autres applications à la métallurgie et aux réacteurs à fusion. La différence essentielle tient dans la valeur du nombre adimensionnel R_m (défini dans la suite) qui, lorsqu'il est supérieur à l'unité, peut donner lieu à un effet dynamo. Dans le cas géophysique et astrophysique, par exemple, ce dernier est au moins de l'ordre de 100.

Certains "magnétohydrodynamiciens" essaient depuis une quinzaine d'années de mettre au point des expériences permettant de reproduire en laboratoire une preuve mesurable de l'effet dynamo [Gailitis et Al 1988, 1989]. L'enjeu est important car, jusqu'à présent, l'effet dynamo n'a été mis en évidence que par des mesures indirectes (astrophysiques). A l'heure actuelle, deux expériences sont en cours de réalisation [Gailitis & Gerbeth 1995] [Busse & Al 1994, 1995]. Les dimensions nécessaires sont de l'ordre du mètre pour la longueur caractéristique et de la dizaine de mètres par seconde pour la vitesse caractéristique. Ces réalisations demandent plusieurs années de construction et de mise au point, avant de pouvoir commencer à faire des mesures. Elles sont aussi la source de collaborations internationales.

¹ La diffusivité magnétique à température ambiante est de $\lambda = c^2/4\pi\sigma = 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$ pour le cuivre, $6 \cdot 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$ pour le fer, $60 \cdot 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$ pour le mercure et $7,5 \cdot 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$ pour le sodium liquide à 100°C.

I.2- L'effet dynamo, phénomène d'intérêt nucléaire

I-2a. Les Réacteurs à Neutrons Rapides

Avec la construction des Réacteurs à Neutrons Rapides (RNR) au cours des années 1970, un nouveau terrain de recherche magnétohydrodynamique de type dynamo est apparu [Bevir, 1973]. En effet, les RNR, utilisant un fluide de refroidissement fortement conducteur (le sodium liquide), ont des grandeurs caractéristiques suffisamment importantes pour pouvoir éventuellement générer un effet dynamo. Une évaluation, fondée sur la valeur du nombre de Reynolds magnétique et le type d'écoulement les parcourant, permet de distinguer différentes zones au sein même du réacteur. De nombreuses mesures autour de ces zones ont été effectuées par différentes équipes de chercheurs [Alemany & Marty 1995][Kirko et Al 1981, 82][Garnier & Werkoff 1984][Garnier 1986][Werkoff & Garnier 1987]. Plusieurs études théoriques, traitant des effets thermoélectriques ou dynamo, et de leur combinaison éventuelle ont été réalisées[Kirko 1984][Marty et Al 1993][Pierson 1975]. Jusqu'à présent, aucun résultat n'a pu prouver la présence d'effet dynamo au sein d'un RNR même de grande taille telle que SuperPhenix. Toutefois, une zone n'a pour l'instant été l'objet d'aucune mesure: le coeur du réacteur, où le sodium est réchauffé par le flux neutronique engendré par les réactions nucléaires.

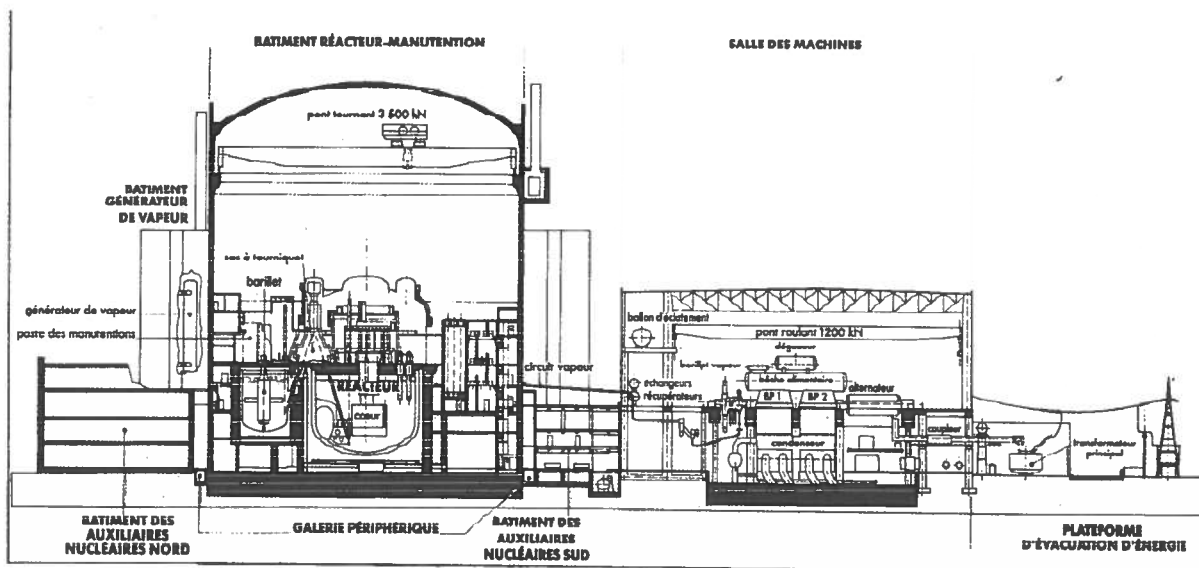


Fig. 1.3- Coupe longitudinale nord-sud de la tranche de SuperPhenix à Creys-Malville

I-2c. Travail effectué

Dans la première partie, un bref tour d'horizon sur les notions principales concernant l'effet dynamo est présenté, suivi d'un bilan sur les études antérieures dans les RNR. Le lecteur pourra ainsi comprendre les raisons qui ont proposé l'effet dynamo comme source des instabilités mécaniques évoquées précédemment.

En deuxième partie, une analyse d'instabilité linéaire portant sur un champ magnétique initialement présent dans le réacteur, permet de prévoir l'amplification éventuelle de ce dernier par effet dynamo, en fonction de certains paramètres de fonctionnement du réacteur (perméabilité moyenne du réacteur, température, débit). Cependant, les simplifications induites par la méthode de résolution employée ne permettent pas de conclure définitivement. Par conséquent, cette étude doit être prolongée par une modélisation plus détaillée, notamment en ce qui concerne la géométrie du réacteur, ainsi que les matériaux le composant.

Dans la troisième partie, une description plus fine du réacteur est donc proposée. L'étude correspondante a donné lieu à une modélisation des équations de l'effet dynamo par la méthode des éléments finis. Plusieurs tests de validation du modèle sont présentés, avant la réalisation finale de la simulation du coeur du réacteur.

En quatrième partie, le bilan des deux approches réalisées au cours de ce travail est dressé. Les résultats sont analysés. Outre celui des réacteurs à neutrons rapides pour lequel il a été réalisé, le champ d'application du modèle numérique présenté en troisième partie concerne tout problème d'effet dynamo cinématique à nombre de Reynolds magnétique modéré et présente, en particulier, l'avantage de pouvoir prendre en compte des géométries complexes, et des matériaux non homogènes. Des perspectives d'utilisation et d'évolution du modèle sont donc proposées, pour les RNR d'une part, et pour des applications plus fondamentales d'autre part.

II- Théorie et Expérience

Dans ce chapitre sont présentées quelques notions théoriques élémentaires nécessaires à la compréhension de toute étude sur l'effet dynamo. Y figurent les principales équations, résultats et théorèmes, sans démonstration.

II-1. Analogie électromécanique

II-1a. La dynamo-disque homopolaire de Bullard [Bullard 1955]

On parle d'effet dynamo quand il y a transformation d'une partie de l'énergie mécanique d'un fluide conducteur en énergie électromagnétique par des effets inductifs. Si, à la place du fluide, on utilise un système d'électro-aimants, de bobines de fils de cuivre, un collecteur et des balais, alors on retrouve la machine dynamo-électrique classique dont le but est de transformer de l'énergie mécanique en courant continu et dont une application courante est la dynamo électrotechnique.

Une illustration classique de l'effet dynamo, bien que non fluide, est la dynamo-disque de Bullard (1955).

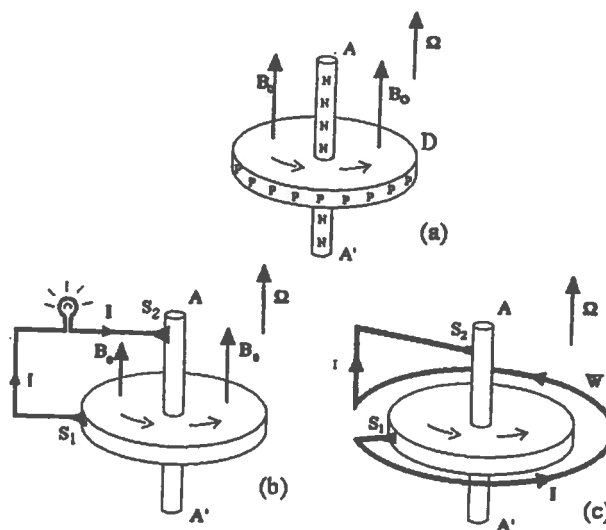


Fig. 1.5- Exemple de système dynamo: (a) Création de champ électromoteur entre l'axe et le disque. (b) Machine dynamo électrique classique. (c) Dynamo-disque homopolaire de Bullard. [Roberts 1987]

Considérons un disque D conducteur, animé d'une vitesse angulaire de rotation Ω , autour d'un axe $A'A$, en présence d'une induction magnétique donnée \mathbf{B}_0 . Les charges q du disque sont donc soumises à la force $q(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0)$. Les charges positives (P) du disque sont alors

concentrées sur le bord de D, tandis que les charges négatives (N) sont concentrées sur l'axe A'A, créant un champ électromoteur (figure 1.5a).

Si on relie par un fil électrique l'axe AA' et le bord du disque par l'intermédiaire de contacts glissants (balais) en S1 et S2 comme sur la figure 1.5b, le système fonctionne alors comme une dynamo de vélo, pouvant éclairer une ampoule.

Si on enroule le fil électrique autour de l'axe (figure 1.5c), alors d'après le théorème d'Ampère, le courant circulant dans le fil induit un champ magnétique \mathbf{B} qui se rajoute au champ initial \mathbf{B}_0 . On comprend qu'il puisse alors y avoir amplification du champ magnétique au cours du temps. Si à un temps donné ultérieur, on supprime la source initiale \mathbf{B}_0 , et que le champ magnétique résultant, continue à être entretenu, alors on dit qu'il y a effet dynamo. Il y a transformation de l'énergie mécanique appliquée sur le disque par l'intermédiaire d'un couple mécanique, en énergie magnétique.

Ce système permet d'avoir une idée de ce qui peut se passer dans un fluide conducteur. En particulier, trois caractéristiques essentielles à l'effet dynamo dans un fluide sont reproduites par ce système [Moreau 1990].

La première concerne le glissement des points de contact du fil électrique sur le bord du disque et sur l'axe. Si le fil tournait en même temps que le disque relié à ce dernier par des contacts fixes, alors aucun effet dynamo n'existerait. Pour comprendre, plaçons-nous dans le repère tournant du disque. Le champ magnétique initial alors en mouvement par rapport au disque induit une densité de courant électrique dans le disque, donc un courant dans la spire. Ce dernier génère ensuite un champ magnétique immobile par rapport au disque et qui est donc incapable de générer à son tour un nouveau courant induit. Par conséquent, dès le moment où on supprime la source de champ magnétique initial, le système ne pourra pas entretenir de champ magnétique. Cette nécessité de glissement du disque par rapport au circuit électrique pourrait être remplacée par une rotation du disque dépendant du rayon. Par exemple, en considérant des couronnes conductrices, imbriquées les unes dans les autres, avec des vitesses de rotation différentes. Cette caractéristique est connue sous le nom de rotation différentielle.

La seconde concerne le sens de l'enroulement du fil électrique autour de l'axe par rapport au sens de rotation du disque. Si, pour le même sens de rotation, le fil est enroulé dans l'autre sens, alors le champ magnétique induit par celui-ci est opposé au champ magnétique initial. Par conséquent ce dernier ne peut pas être amplifié par le système. Il y aura même une décroissance accélérée de ce dernier par rapport au temps de diffusion ohmique. Cette seconde caractéristique est connue sous le nom de manque de symétrie de réflexion.

La troisième concerne la notion de seuil de vitesse. L'auto-entretien de \mathbf{B} n'est possible qu'au-delà d'une certaine vitesse critique dépendant des données du problème (rayon, épaisseur du disque, conductivité, ...).

II-1b. La dynamo-disque couplée de Rikitake [Rikitake 1958]

Lorsqu'on couple deux dynamo-disques par l'intermédiaire d'inductances mutuelles entre le circuit de l'une et le disque de l'autre (figure 1.6), alors les courants électriques ont des évolutions chaotiques dans le temps, et présentent deux échelles de fluctuations, analogues au comportement du champ paléomagnétique (figure 1.7). Ce système a bien entendu fait l'objet de nombreuses études, pour son intérêt géophysique [Cook & Roberts 1970] [Hide 1995], mais aussi pour son aspect mathématique [Ershov et al 1989] [Ito 1980]. Dans le cadre de ma thèse, j'ai étudié ce système de façon plus élaborée avec, en particulier, des courants azimutaux dans le disque [Moffatt 1979] plus des frottements mécaniques sur les axes. L'article correspondant figure en Annexe 1A.

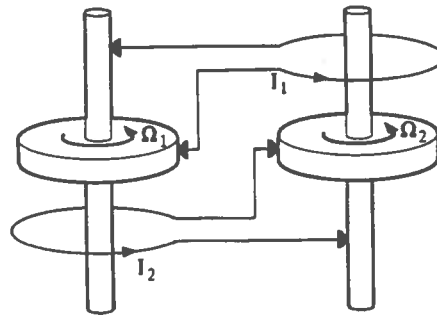


Fig. 1.6- Dynamo-disque de Rikitake

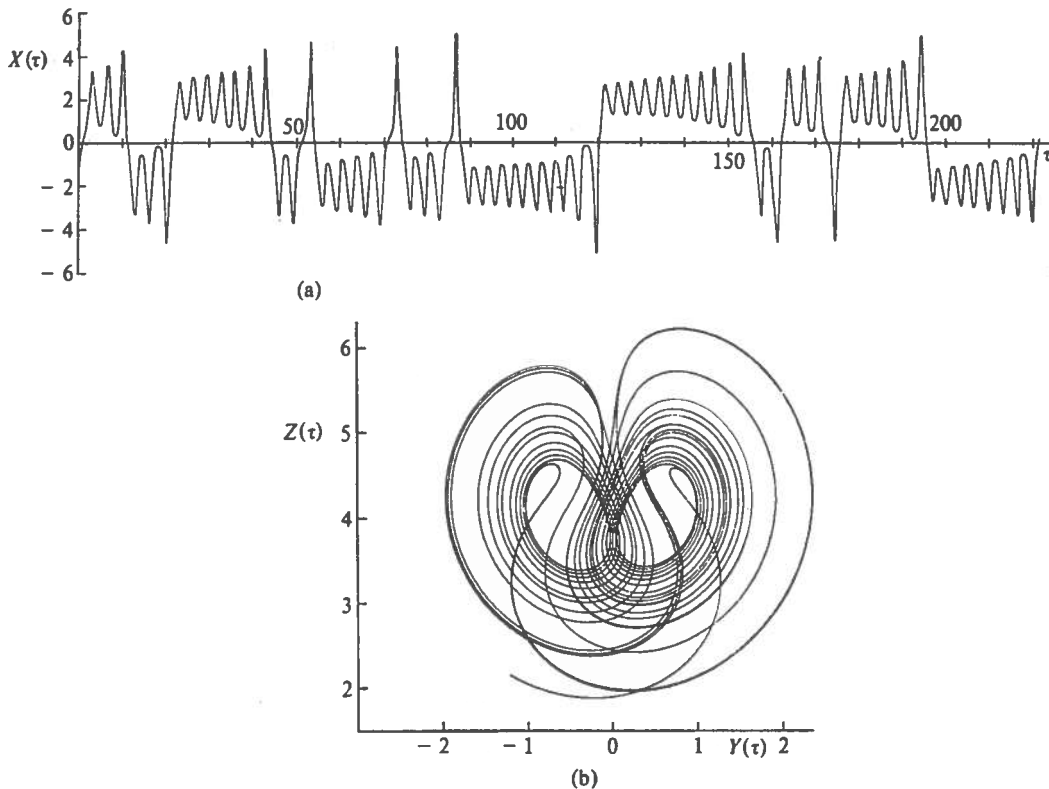


Fig. 1.7- (a) Evolution adimensionnelle de I_1 en fonction du temps- (b) Ω_1 en fonction de I_2 dans l'espace de phase adimensionnel.

II-2. Formulation mathématique

II-2a. Définition de l'effet dynamo cinématique [Moffatt 1978]

Soit un domaine (Ω) fermé, une perméabilité magnétique μ , une conductivité électrique σ , un champ de vitesse \mathbf{V} et une induction magnétique \mathbf{B} définis en chaque point de (Ω). Supposons de plus qu'à l'extérieur de (Ω), le milieu soit électriquement isolant ($\mathbf{B} = O(r^{-3})$, $r \rightarrow \infty$). Soit l'énergie magnétique définie sur (Ω) par:

$$E_{\text{mag}} = \iiint_{(\Omega)} \frac{B(t)^2}{2\mu} d\Omega$$

Supposons qu'à l'instant $t = t_0$, l'énergie magnétique sur (Ω) soit non nulle:

$$E_{\text{mag}}(t_0) \neq 0.$$

On dit que \mathbf{V} agit comme une dynamo lorsque, en l'absence de source électromagnétique extérieure, l'énergie magnétique du domaine ne tend pas vers zéro au cours du temps:

$$E_{\text{mag}}(t) \not\rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

c'est-à-dire lorsque l'écoulement parvient à s'opposer à la diffusion du champ magnétique.

Expérimentalement, une façon de mesurer la présence d'effet dynamo consiste à établir un champ magnétique au sein de l'écoulement (condition initiale), à l'aide par exemple d'un courant parcourant une spire extérieure à l'écoulement. A un temps donné, le courant de la spire est coupé brutalement (plus de source extérieure) et on mesure le temps de déclin du champ magnétique. Si le fluide est au repos, alors le temps de déclin est égal à celui de la diffusion du champ magnétique dans le fluide. Lorsque le fluide est en mouvement, et que le temps de déclin est infini par rapport au temps de diffusion, alors il y a effet dynamo.

Dans sa description complète, l'effet dynamo est un phénomène non linéaire, décrit par l'évolution en temps et en chaque point de l'espace du champ de vitesse, du champ magnétique, du champ de température, de la densité du fluide et de l'entropie.

Pour un écoulement isotherme et incompressible, le phénomène est entièrement décrit par les équation de Navier-Stokes, de conservation de la masse, Maxwell et la loi d'Ohm.

Les écoulements dynamos cinématiques et laminaires sont séparés en deux catégories, suivant le comportement de l'énergie magnétique lorsque R_m tend vers l'infini. Le formalisme suivant est généralement admis [Zeldovich et al 1983]:

$$\text{Dynamo rapide: } \lim_{R_m \rightarrow +\infty} \frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial t} > 0$$

$$\text{Dynamo lente: } \lim_{R_m \rightarrow +\infty} \frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial t} = 0$$

où E_{mag} est l'énergie magnétique du système.

II-2b. Equations de Navier-Stokes

Le comportement d'un écoulement soumis aux seules forces volumiques de gravité et de Laplace est décrit par les équations de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

où P désigne la pression, ρ la densité volumique du fluide, ν sa viscosité cinématique et \mathbf{g} le vecteur de gravité. En supposant la densité volumique du fluide homogène et constante au cours du temps, le principe de conservation de la masse est traduite par l'équation suivante:

$$\text{div} \mathbf{V} = 0$$

On remarque que l'induction magnétique agit sur le champ de vitesse par l'intermédiaire des forces de Laplace en ayant tendance à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance (loi de Lenz). Dans le cas de la dynamo-disque homopolaire, par exemple, la force de Laplace, issue du champ magnétique induit par la spire, a tendance à freiner la rotation du disque. C'est la raison pour laquelle, dans le cas d'effet dynamo non linéaire, une croissance infinie du champ magnétique est impossible.

II-2c. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell, dans le cas d'un matériau suffisamment conducteur pour pouvoir négliger les courants de déplacement (le transport des charges électriques dû à la convection est négligeable par rapport à celui dû à la conduction électrique), peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{j}$$

où μ est la perméabilité magnétique du matériau au point considéré.

En prenant la divergence de la seconde équation, on remarque que $\text{div} \mathbf{B}$ est indépendant du temps. La première équation est donc une condition initiale.

II-2d. Loi d'Ohm

Dans un repère de référence lié au laboratoire, la loi d'Ohm peut être écrite sous la forme:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

où σ est la conductivité électrique du fluide.

Contrairement aux relations précédentes qui sont fondamentales, la loi d'Ohm est de nature phénoménologique. Sa justification et la détermination de la valeur de σ en terme de structure moléculaire du fluide requièrent des méthodes de mécanique statistique. Nous les supposons valides dans notre étude. Cette loi est appliquée dans un large domaine de matériaux (plasmas) et de champs électriques et magnétiques. En outre, on peut la compléter par d'autres relations telles que effet Hall, conductivité anisotrope, etc.

II-2e. Equation de l'induction

L'évolution de l'induction magnétique \mathbf{B} au cours du temps et en tout point de l'espace est formulée mathématiquement par l'équation de l'induction:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) \right)$$

issue des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm. $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ en est toujours solution. Par conséquent, il faut une valeur de l'induction magnétique initiale non nulle pour qu'il y ait effet dynamo.

Dans le cas où les paramètres σ et μ sont indépendants des coordonnées spatiales, alors l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}$$

où $\lambda = 1/\sigma\mu$ est la diffusivité magnétique.

En utilisant le principe de conservation de la masse ainsi que l'aspect conservatif de \mathbf{B} , l'équation de l'induction s'écrit:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}$$

Cette dernière expression met en valeur différents termes dont la signification physique est analogue à celle des termes composant l'équation de la vorticité en mécanique des fluides.

- Les deux termes du membre de gauche forment la dérivée Lagrangienne de l'induction magnétique $d\mathbf{B}/dt$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ exprimant la variation de l'induction magnétique dans la direction de l'écoulement.
- Le premier terme du membre de droite $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ caractérise l'étirement et la déformation des lignes de l'induction magnétique par les gradients de vitesse. C'est le terme source de l'effet dynamo.
- Enfin, le dernier terme $\lambda \nabla^2 \mathbf{B}$ représente la diffusion de l'induction magnétique.

L'émergence d'effet dynamo dépend donc de la prédominance entre les deux termes du membre de droite. Ainsi, si la diffusion est nettement prédominante, alors l'énergie magnétique s'éteindra naturellement et tout effet dynamo sera impossible. En revanche, lorsque la diffusion est faible par rapport aux gradients de vitesse, alors les lignes de champ magnétique sont fortement convectées par l'écoulement, étirées par celui-ci   la manière des lignes tourbillonnaires en mécanique des fluides. L'énergie magnétique du système est alors amplifiée par l'écoulement.

II-2f. Description cinématique et dynamique

Lorsque pour un écoulement donné, on s'intéresse simplement à l'amplification d'un champ magnétique initial, avant que celui-ci n'ait affecté le champ de vitesse, alors seule l'équation de l'induction est significative. L'étude est dite cinématique. Cela permet, en particulier, de définir des critères d'apparition de l'effet dynamo en fonction de caractéristiques générales du champ de vitesse telles que le nombre de Reynolds magnétique (II-2g) ou l'hélicité cinétique (II-2f). En particulier, cela permet de faire avancer la compréhension du phénomène et sa prédiction dans des cas où la géométrie de l'écoulement est peu connue comme dans la partie liquide du noyau terrestre ou dans le coeur d'un réacteur à neutrons rapides.

L'étude est dite dynamique lorsque le champ magnétique peut à son tour agir sur le champ de vitesse (force de Laplace) et le modifier (figure 1.8). Cette description non linéaire peut engendrer des solutions chaotiques. C'est le cas, par exemple de la dynamo-disque bipolaire, où vitesse et courants induits sont fortement couplés.

Dans les équations de Navier-Stokes et de l'induction, on observe que si (\mathbf{v}, \mathbf{B}) est solution du système couplé, alors $(\mathbf{v}, -\mathbf{B})$ l'est aussi, rendant l'inversion de polarité du champ magnétique mathématiquement possible.

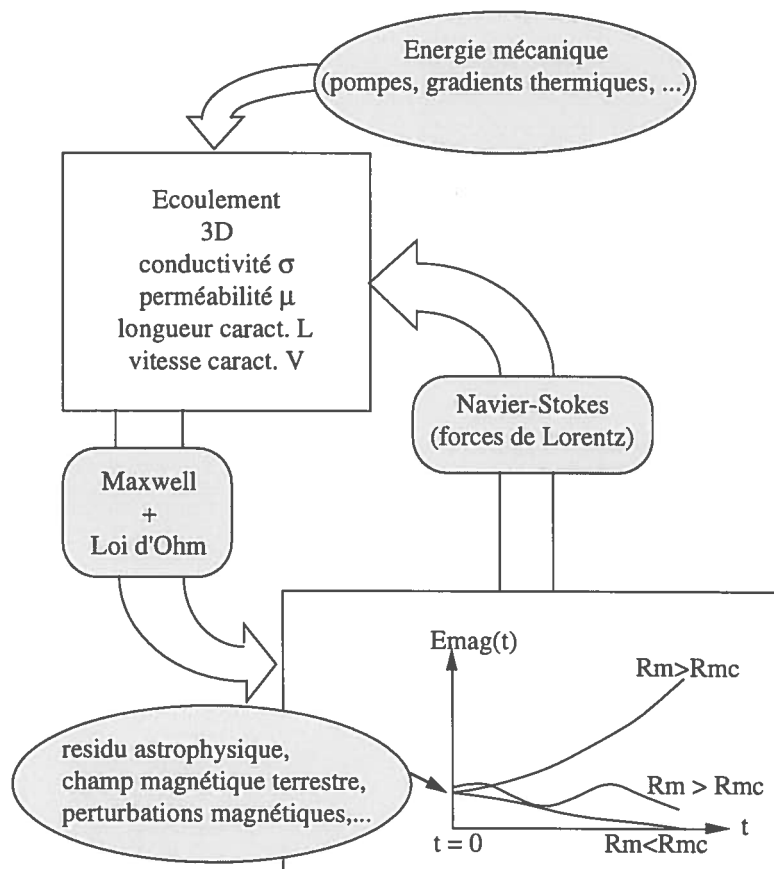


Fig. 1.8- Schématisation des formulations mathématiques de l'effet dynamo dynamique

II-2g. Nombre de Reynolds magnétique

De façon analogue au nombre de Reynolds cinétique en mécanique des fluides, le nombre de Reynolds magnétique est défini de la manière suivante:

$$R_m = \frac{VL}{\lambda}$$

où V et L sont des vitesse et longueur caractéristiques de l'écoulement, et λ la diffusivité magnétique du fluide.

On remarque que, dans l'équation de l'induction, le rapport du terme de convection $\text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ sur le terme de diffusion magnétique $\lambda \nabla^2 \mathbf{B}$ est homogène au nombre de Reynolds magnétique si \mathbf{B} et \mathbf{V} ont même échelle de variation spatiale. Ainsi, si R_m est inférieur à 1, l'effet dynamo est impossible. Dans le cas où les variations du champ de vitesse et celles de l'induction n'ont pas la même échelle caractéristique, l'évaluation de R_m n'est pas caractéristique du phénomène. Cependant on considère en général qu'une grande valeur du R_m est un facteur favorable à l'apparition d'effet dynamo (condition nécessaire mais pas suffisante). Pour un métal liquide tel que le sodium, le rapport R_m/R_e (Prandtl magnétique) est de l'ordre de 10^{-5} entre 100°C et 500°C . Dans ce cas là, un écoulement dynamo est donc forcément turbulent. La figure 1.9 résume en fonction des nombres de Reynolds magnétique et cinématique les différents domaines d'étude possibles de l'effet dynamo.

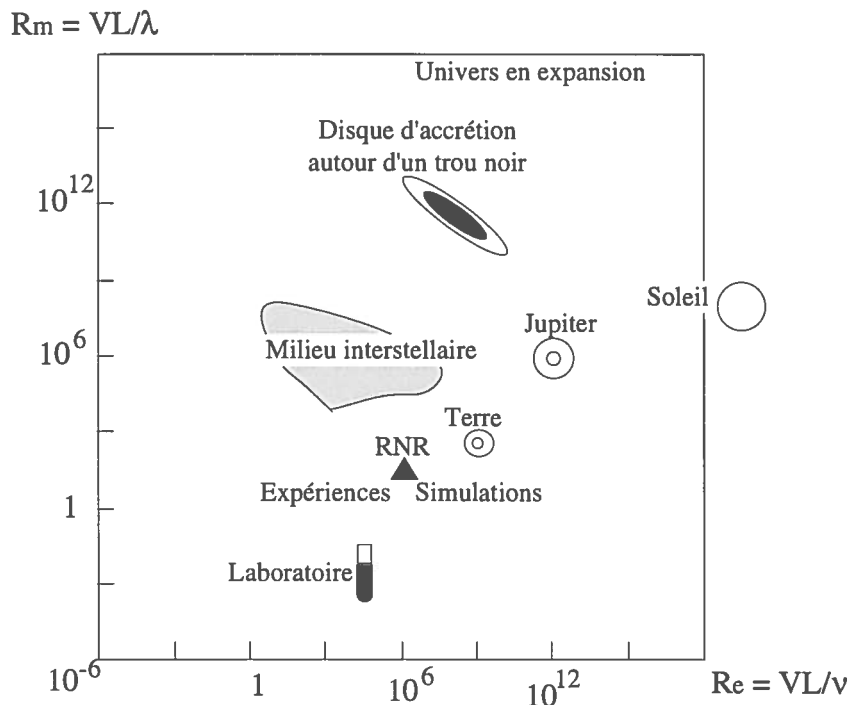


Fig. 1.9- Classification en fonction de Re et R_m .

II-2h. Hélicité cinématique

Si un nombre de Reynolds magnétique supérieur à 1 est nécessaire pour obtenir un effet dynamo, la présence d'hélicité cinématique \mathcal{H} dans l'écoulement ne l'est pas quoique fortement favorable lorsqu'il y a séparation des échelles d'écoulement [Léorat 1975] [Pouquet et al 1976]. Définie par

$$\mathcal{H} = \int_{(\Omega)} \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v} \, d\Omega$$

elle exprime la qualité tourbillonnaire 3D de l'écoulement.

De fait, la plupart des écoulements dynamo théoriques connus ont une hélicité non nulle (écoulements de Beltrami, Ponomarenko, Roberts). Son importance a été mise en valeur dans de nombreux cas [Benton 1979] [Berger 1984] [Frisch et al 1975][Rädler & Seehafer 1989][Rüzmaikin et al 1980].

II-1i. Théorèmes anti-dynamo

Tout écoulement ne peut pas forcément produire un effet dynamo, même pour une valeur élevée du nombre de Reynolds magnétique. Plusieurs théorèmes anti-dynamo ont été démontrés, le plus connu étant celui énoncé par Cowling en 1934.

Théorème de Cowling (1934)

“Un champ magnétique axisymétrique ne peut pas être entretenu par effet dynamo, quelque soit la valeur du nombre de Reynolds magnétique.”

L'énoncé de ce théorème provoqua un émoi certain au sein de la communauté géophysique voyant s'effondrer la principale hypothèse de justification de l'existence du champ magnétique terrestre. En fait, ce théorème concerne un écoulement laminaire et ne s'applique pas à la partie moyenne d'un écoulement turbulent comme nous le verrons dans la section suivante. Il est donc moins contraignant qu'il n'apparut initialement. Par ailleurs, il semble que la démonstration rigoureuse du théorème soit difficile à établir, dans la généralité de l'énoncé original [Roberts 1987]. Une forme plus restrictive de ce dernier trouve une démonstration mathématique rigoureuse [Moffatt 1978] sous la forme:

“Tout écoulement incompressible dont le champ de vitesse est axisymétrique ne peut pas entretenir, par effet dynamo, un champ magnétique axisymétrique”.

A la lumière de ce théorème, il apparaît nécessaire de faire la distinction entre écoulement dynamo et amplificateur. En effet, un écoulement axisymétrique pourra effectivement amplifier, au cours du temps, une source de champ magnétique axisymétrique initiale. Mais ce champ magnétique déclinera dès que la source initiale sera supprimée (pas d'effet dynamo) et quelque soit le nombre de Reynolds magnétique.

Un amplificateur de champ magnétique fut réalisée par Kolm et O.K.Mawardi (1961).

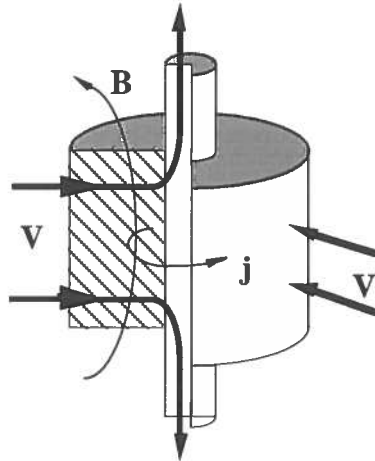


Fig. 1.10- Schéma de l'expérience de Kolm et Mawardi (1961). La vitesse est radiale dans le corps cylindrique, le champ magnétique B est poloïdal et la densité de courant induit j azimuthale.

Le système est constitué de deux cylindres coaxiaux entre lesquels baigne du NaK. Le fluide est animé d'une vitesse radiale allant du cylindre extérieur vers le cylindre intérieur. Dans ce dernier, des orifices permettent au liquide de refluer axialement.

Supposons l'existence d'un champ poloïdal initial B (figure 1.10). Un courant induit j apparaît alors dans le fluide, entre les deux cylindres (loi d'Ohm). Ce courant, toroïdal, génère à son tour un champ magnétique (théorème d'Ampère) qui se superpose au champ initial et amplifie ce dernier. Ce système fonctionne donc bien comme un amplificateur. Lorsque le champ magnétique initial est coupé, le champ magnétique n'est pas maintenu dans l'écoulement [Shercliff 1965]. Ce n'est donc pas une dynamo, contrairement à ce que de récents travaux laissent entendre [Salingaros 1993, 1994].

Théorème de Cowling bis

Tout champ magnétique indépendant d'une coordonnée cartésienne (z , par exemple) ne peut pas être entretenu par effet dynamo.

Écoulement toroïdal

Un écoulement purement toroïdal ne peut pas entretenir un champ magnétique par effet dynamo [Bullard et Gellman, 1954] [Moffatt, 1978].

Écoulement plan

Un écoulement plan (par exemple $V_z=0$ en coordonnées cartésiennes) ne peut pas entretenir un champ magnétique par effet dynamo [Zeldovich, 1957] [Cowling, 1957][Moffatt, 1978].

Écoulement radial et de dépendance radiale

Un écoulement dont le champ de vitesse est de la forme $\mathbf{V} = V(r, t) \mathbf{e}_r$ (où \mathbf{e}_r est le vecteur unitaire radial cylindrique ou sphérique) ne peut pas entretenir un champ magnétique par effet dynamo [Namikawa et Matsushita, 1970- Iver et James, 1986].

II-3. Mécanismes fondamentaux

Quelques mécanismes classiques de l'effet dynamo sont présentés.

- Le premier (rotation différentielle) traduit la déformation des lignes de champ magnétique par les gradients de vitesse. Il n'est pas suffisant, à lui seul, pour générer de l'effet dynamo. Il est cependant présent dans la plupart des dynamos connues.
- Le second (effet α) caractérise les dynamos à plusieurs échelles. Une méthode similaire à celle utilisée pour le mettre en évidence sera appliquée dans la seconde partie de notre étude.
- Enfin deux illustrations classiques de mécanismes dynamo sont présentés.

II-3a. Rotation différentielle

Les champs de vitesse \mathbf{V} et d'induction \mathbf{B} étant conservatifs (à divergence nulle), ils peuvent être décomposés sous la forme:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_P + \mathbf{V}_T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_P + \mathbf{B}_T.$$

l'indice P désignant la composante poloïdale du champ et T sa composante toroïdale (Annexe 1B).

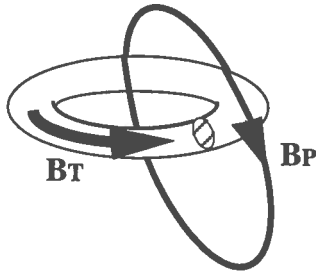


Fig. 1.11- Décomposition poloïdale et toroïdale de \mathbf{B} dans le cas axisymétrique.

Plaçons-nous dans le cas où \mathbf{V} et \mathbf{B} sont axisymétriques (figure 1.11). Alors, il devient possible de découpler les composantes toroïdale et poloïdale de l'équation de l'induction. Ainsi, l'évolution de la composante toroïdale de l'induction s'écrit sous la forme:

$$(1.2) \quad \frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t} + (\mathbf{V}_P \cdot \nabla) \mathbf{B}_T = (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \mathbf{V}_T + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}_T$$

L'évolution de la composante poloïdale de l'induction s'écrit:

$$(1.3) \quad \frac{\partial \mathbf{B}_P}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{V}_P \times \mathbf{B}_P) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}_P$$

La première équation montre clairement que l'étirement des lignes de champ magnétique poloïdal par les gradients de vitesse toroïdal ($\mathbf{B}_P \cdot \nabla \mathbf{V}_T$) génère du champ magnétique toroïdal. On dit qu'il y a étirement des lignes de champ par rotation différentielle. Une illustration en est donnée ci-dessous. C'est le même type de mécanisme qui est présent dans la dynamo disque homopolaire par l'intermédiaire du glissement des contacts du fil électrique sur le bord du disque et sur l'axe.

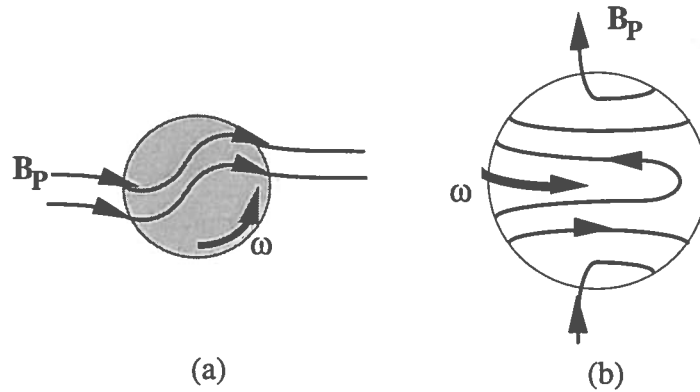


Fig. 1.12- Action qualitative de la rotation différentielle; (a) lorsque le vecteur rotation $\omega \mathbf{k}$ est perpendiculaire au champ magnétique; (b) lorsque le vecteur rotation $\omega \mathbf{k}$ est parallèle au champ magnétique.

Une vérification expérimentale de la rotation différentielle a été menée en 1957 par Lehnert B., à Stockholm. Une cuve de 58 litres de sodium liquide fût placée dans un champ magnétique initial poloïdal. Lorsque le bain fut animé d'un mouvement de rotation entraîné par les pales du disque tournant à une vitesse angulaire ω , une composante toroïdale du champ magnétique fut mesurée.

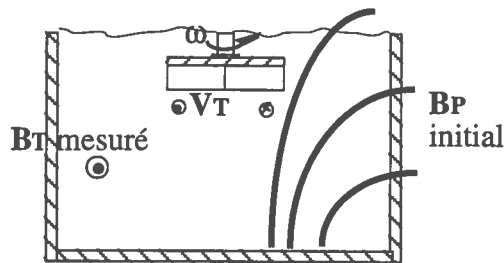


Fig. 1.13- Vérification expérimentale de l'entretien d'une composante magnétique toroïdale à partir d'un champ magnétique poloïdal, par rotation différentielle.

II-3b. Effet α

Supposons que l'on puisse décomposer tout champ de vecteur (\mathbf{B} , \mathbf{V}) en une partie moyenne plus une partie fluctuante:

$$\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}} \quad \mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{V}}$$

la moyenne étant calculée soit spatialement soit temporellement. Largement appliquée dans le cadre de la théorie de la turbulence homogène [Batchelor 1953], cette méthode nécessite que la composante moyenne ne varie pas ou peu à l'échelle des fluctuations. Le but de la méthode est de déduire un comportement des parties moyennes des champ de vecteurs considérés, à partir de leurs interactions avec les parties fluctuantes.

On montre alors que l'évolution de l'induction magnétique moyenne $\overline{\mathbf{B}}$, est donnée par l'équation suivante:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \mathbf{rot} (\overline{\mathbf{V}} \times \overline{\mathbf{B}}) + \mathbf{rot} \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \nabla^2 \overline{\mathbf{B}}$$

où

$$\varepsilon_i = \alpha_{ij} \overline{B}_j + \beta_{ijk} \frac{\partial \overline{B}_j}{\partial x_k}$$

et où les α_{ij} et les β_{ijk} sont déterminés par la vitesse moyenne $\overline{\mathbf{V}}$, les propriétés statistiques du champ de vitesse fluctuant \mathbf{V} , et de λ . L'expression se simplifie dans le cas idéal isotrope:

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad \beta_{ijk} = \beta \varepsilon_{ijk}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \overline{\mathbf{B}} - \beta \mathbf{rot} \overline{\mathbf{B}}$$

Dans le cas où $\overline{\mathbf{B}}$ est axisymétrique (ou bidimensionnel), et en effectuant une décomposition poloïdale, toroïdale des champs vectoriels, les composantes de l'équation de l'induction s'écrivent:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}_T}{\partial t} + (\overline{\mathbf{V}}_P \cdot \nabla) \overline{\mathbf{B}}_T = (\overline{\mathbf{B}}_P \cdot \nabla) \overline{\mathbf{V}}_T + \mathbf{rot} (\alpha \overline{\mathbf{B}}_P) + (\lambda + \beta) \nabla^2 \overline{\mathbf{B}}_T \\ \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}_P}{\partial t} = \mathbf{rot} (\overline{\mathbf{V}}_P \times \overline{\mathbf{B}}_P) + \mathbf{rot} (\alpha \overline{\mathbf{B}}_T) + (\lambda + \beta) \nabla^2 \overline{\mathbf{B}}_P \end{cases}$$

On constate que par rapport aux équations (1.2) et (1.3) de la section précédente (II-3b), des termes supplémentaires apparaissent:

- des termes sources $\mathbf{rot} (\alpha \overline{\mathbf{B}}_P)$ et $\mathbf{rot} (\alpha \overline{\mathbf{B}}_T)$.
- un coefficient de diffusivité β .

La présence des termes sources supplémentaires est appelée effet cyclonique [Parker 1955] ou effet α [Steenbeck et al 1966].

L'effet α permet la génération, à partir d'un champ magnétique donné $\overline{\mathbf{B}}_T$ (resp. $\overline{\mathbf{B}}_P$), d'une densité de courant $\overline{\mathbf{j}}_T = \alpha \overline{\mathbf{B}}_T$ (resp. $\overline{\mathbf{j}}_P = \alpha \overline{\mathbf{B}}_P$), puis (équation de Maxwell) d'un champ magnétique $\overline{\mathbf{B}}_P = \text{rot } \overline{\mathbf{j}}_T$ (resp. $\overline{\mathbf{B}}_T = \text{rot } \overline{\mathbf{j}}_P$). Il permet donc un entretien global du champ magnétique (figure 1.14).

Toutefois sa présence n'est pas nécessaire dans la première équation de (1.4) grâce à la présence du terme source de type rotation différentielle $(\overline{\mathbf{B}}_P \cdot \nabla) \overline{\mathbf{V}}_T$. Dans ce dernier cas, le système est dit de type $\alpha\omega$ (cas hypothétique de la Terre). Lorsque l'effet α est prépondérant par rapport la rotation différentielle dans la première équation de (1.4), le système est dit de type α^2 (cas hypothétique du Soleil).

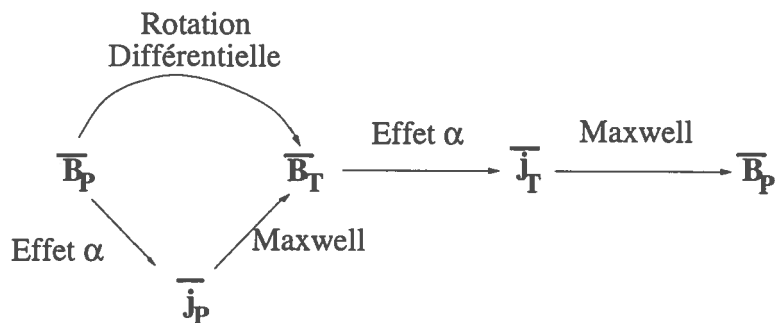


Fig. 1.14- Cycle complet d'entretien du champ magnétique moyen pour un écoulement à plusieurs échelles.

Une façon simple d'illustrer l'effet α consiste à décrire la déformation d'une ligne de champ magnétique moyen par une fluctuation d'écoulement en deux étapes successives (figure 1.15).

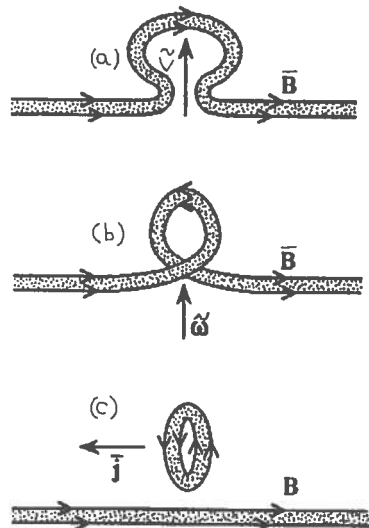


Fig. 1.15- Boucle formée par torsion d'une ligne de champ magnétique, illustrant l'effet α .

La ligne de champ est déformée par $\tilde{\mathbf{V}}$ (figure 1.15a), puis tordue par $\tilde{\omega} = \text{rot } \tilde{\mathbf{V}}$ (figure 1.15b), créant une densité de courant moyen $\tilde{\mathbf{j}}$ de sens opposé au champ magnétique initial (figure 1.15c).

Une vérification expérimentale de l'effet α a été menée par Steenbeck et al., en 1967.

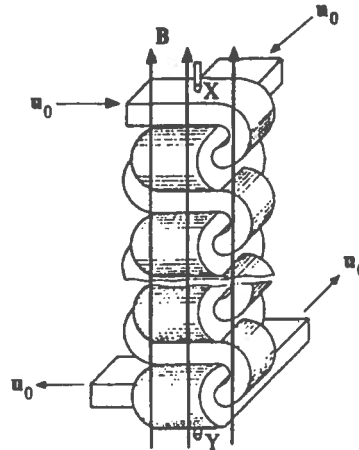


Fig. 1.16- Vérification expérimentale de l'effet α .

Ce dispositif est constitué de deux canaux enchevêtrés et parcourus par du sodium liquide, de telle sorte que $\mathbf{u}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{u}_0 < 0$. Une évaluation de α amène à l'expression d'un potentiel électrique créé entre X et Y de la forme:

$$\Delta\phi \equiv n l_0^2 u_0^2 \sigma \mu B_0$$

où n est le nombre de sections des canaux entre X et Y et l_0 la largeur de chaque canal. La dépendance de $\Delta\phi$ en fonction de u_0^2 et B_0 a pu être vérifiée. L'essai a également permis d'établir que la force électromagnétique entre les électrodes due à l'effet α changeait de signe lorsqu'on modifiait le sens de \mathbf{B} , et qu'elle ne changeait pas de signe lorsqu'on modifiait la direction de l'écoulement du sodium liquide.

II-3c. Illustrations de l'effet dynamo

Intéressons-nous au comportement de tubes de flux magnétiques, pour lesquelles $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \text{Cte}$, \mathbf{B} étant l'induction magnétique et \mathbf{S} le vecteur porté par la normale à la section du tube, et d'intensité égale à la section de ce dernier. Supposons un tube de flux, refermé sur lui-même. Une analogie assez pratique peut être faite entre la boucle de flux magnétique formée et un ruban élastique. En effet, lorsqu'on étire la boucle de flux magnétique, la section diminue. Or, puisque $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \text{Cte}$, l'intensité de \mathbf{B} augmente, de façon analogue à la force de rappel du ruban élastique.

Mécanisme de Convection-diffusion [Zeldovitch et al, 1983]

Ce mécanisme peut être expliqué en trois étapes à partir d'une boucle de flux magnétique initiale (figure 1.17).

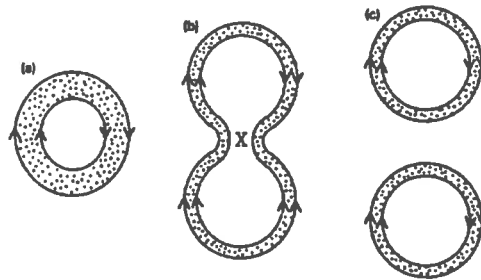


Fig. 1.17- Illustration d'une dynamo convecto-diffusive en trois étapes: (a) étirement, (b) pincement, (c) séparation

Tout d'abord, la boucle de flux est étirée par les gradients de vitesse (figure 1.17a). Supposons que la section diminue de moitié, alors l'intensité de \mathbf{B} multipliée par deux. Il y a transformation d'énergie cinétique en énergie magnétique. Puis la boucle est pincée en forme de huit (figure 1.17b). Enfin, par diffusion les deux boucles formées se détachent. En les superposant, elles forment alors une boucle de même section qu'au départ, avec un champ magnétique de module deux fois plus grand. On remarque l'importance de la diffusion dans la seconde étape.

Mécanisme d'étirement- torsion- pliage [Moffatt 1989]

La première étape est la même que précédemment (figure 1.18b). Puis, la boucle subit une torsion (figure 1.18c) suivie d'un pliage de la boucle sur elle-même (figure 1.18d). La diffusion intervient enfin en dernier lieu pour désolidariser les deux boucles formées. L'importance des deux effets de convection successifs diffèrent du mécanisme précédent.

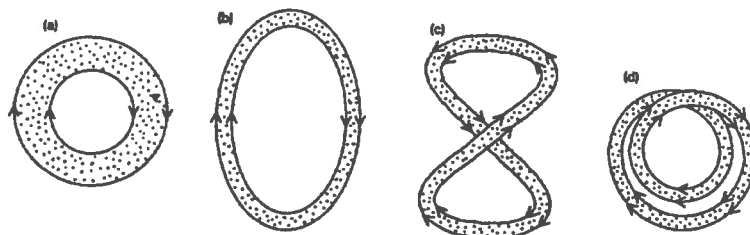


Fig. 1.18- Illustration du mécanisme étirement (b)- torsion (c)- pliage (d).

II-4. Travaux expérimentaux

Si depuis presque un siècle, l'effet dynamo est reconnu comme la seule explication vraisemblable des champs magnétiques géophysique et astrophysique, il n'y a eu, jusqu'à présent, aucune preuve expérimentale directe du phénomène. Deux équipes de chercheurs se préparent à relever le défi dans les prochaines années.

II-4a. Ecoulement hélicoïdal

En 1973, Ponomarenko montra qu'un écoulement hélicoïdal infini, plongé dans un milieu immobile, le tout étant électriquement conducteur est une dynamo (figure 1.19).

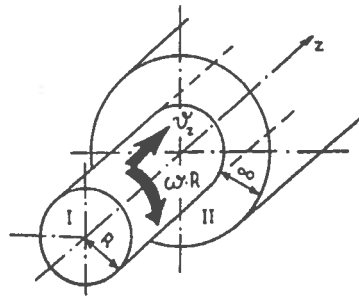


Fig. 1.19- Ecoulement de Ponomarenko: hélicoïdal dans le cylindre intérieur I, immobile à l'extérieur II.

Dans le cas où l'écoulement est "en bloc", alors la dynamo est de type rapide [Gilbert 1988] et le nombre de Reynolds magnétique critique est de 17 [Gailitis A. et al 1988]. Dans le cas où l'écoulement est de type "Couette-Poiseuille", alors la dynamo est de type lente [Rüzmaikin et al 1988, 1989], et le nombre de Reynolds magnétique critique vaut 20 [Gailitis et al 1988].

Une expérience fondée sur le principe de la dynamo hélicoïdale est en cours de réalisation à Riga, Letonie [Gailitis A. et Gerbeth G. 1995]. Elle est la réplique d'une expérience abandonnée suite à des incidents mécaniques irréversibles [Gailitis A. et al 1988]. L'écoulement intérieur est hélicoïdal (4), entouré d'une couronne parcourue par un écoulement de retour axial (6), le tout entouré de fluide au repos (7) (figure 1.20). Le fluide utilisé est du sodium (liquide à partir de 100°C) et le nombre de Reynolds magnétique prévu est de 19.

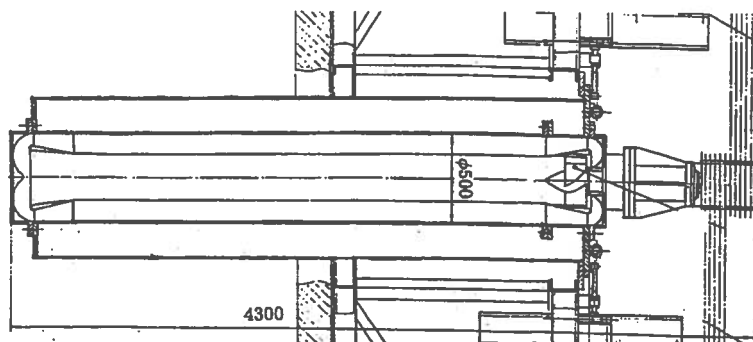


Fig. 1.20- Expérience de dynamo hélicoïdale en cours de réalisation à Riga [Gailitis A. et Gerbeth G. 1995].

II-4b. Ecoulement périodique

En 1972, G.O. Roberts montra qu'un écoulement composé d'hélices alternées placées périodiquement les unes à côté des autres était générateur d'effet dynamo, dans le cas où les dimensions verticales et horizontales de l'écoulement sont infinies. Le champ magnétique amplifié est alors périodique en x , y et se propage le long de l'axe vertical.

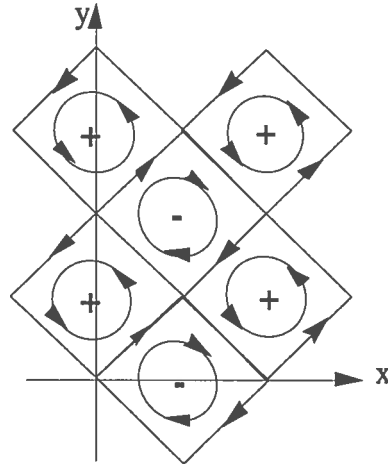


Fig. 1.21- Ecoulement périodique dynamo [G.O. Roberts, 1972]

Un modèle expérimental reproduisant cette configuration d'écoulement précitée est en cours de réalisation à Karlsruhe, Allemagne [Busse et al 1995]. Ce modèle comprend un réseau de cellules placées les unes à côté des autres et parcourues par du sodium liquide (figure 1.22). Dans chacune des cellules, l'écoulement est divisé en une partie axiale au centre de la cellule, et une partie hélicoïdale en bordure de la cellule. L'écoulement entre deux cellules voisines est alterné à la manière du champ de vitesse proposé par G.O. Roberts.

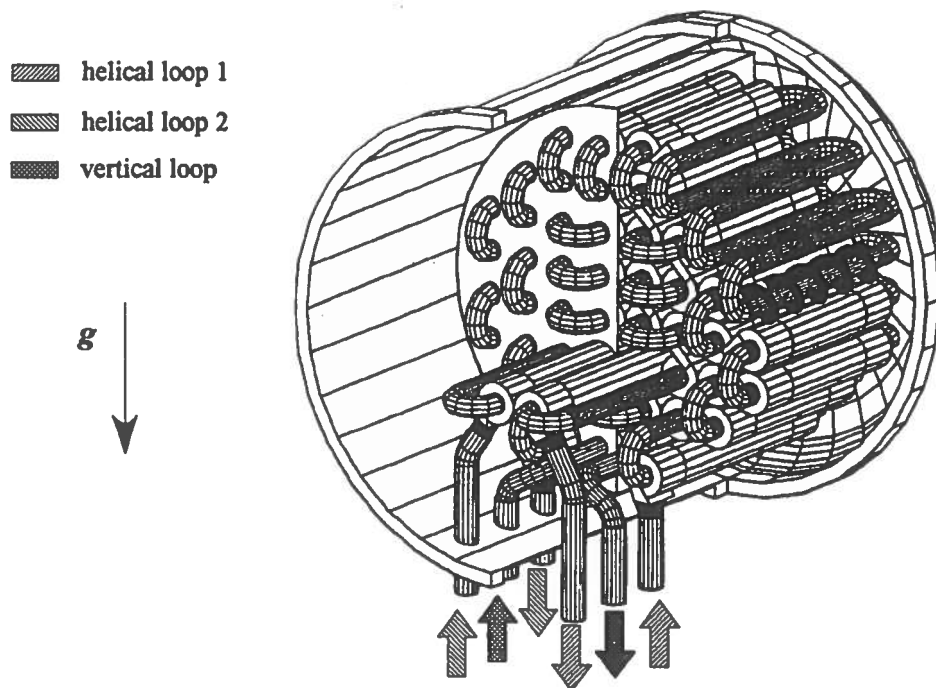


Fig. 1.22- Géométrie de l'expérience en cours de réalisation à Karlsruhe, Allemagne [Busse et al 1995].

III- Etudes antérieures concernant l'Effet Dynamo dans les Réacteurs à Neutrons Rapides

Dans les années 70, la construction des premières grosses centrales à neutrons rapides de type piscine fut accompagnée des premières études concernant les effets MHD dans les réacteurs. Deux campagnes de mesures eurent lieu au cours des années 80: l'une sur le circuit primaire du réacteur russe BN600, et l'autre sur le circuit secondaire du réacteur français Phenix. Les résultats des séries de travaux expérimentaux sont exposés en sections III-3 et III-4. Enfin, deux autres campagnes ont été commencées en 1993, l'une sur le circuit secondaire du réacteur français SuperPhenix, l'autre dans le coeur de Phenix.

Préalablement à la présentation des résultats des deux premières séries de travaux, le fonctionnement d'un Réacteur à Neutrons Rapides est brièvement évoqué, suivi d'un bilan comparatif des zones du réacteur susceptibles de générer de l'effet dynamo.

III-1. Description d'un Réacteur à Neutron Rapide (RNR)

III-1a. L'intérêt d'un RNR

L'énergie nucléaire est l'énergie que l'on récupère sous forme de chaleur lorsqu'on brise, au moyen d'un neutron, les noyaux des matériaux fissiles, Uranium 235 ou Plutonium 239.

L'Uranium naturel ne contient que 0,7% d' U^{235} pour 99,3% d' U^{238} . L' U^{235} se casse facilement sous l'action de neutrons, l' U^{238} très difficilement mais il absorbe facilement les neutrons (du moins ceux d'énergie suffisante) pour donner un nouveau corps: le Plutonium 239, lui-même susceptible de se briser sous le choc d'un autre neutron. Lorsqu'on utilise directement l'Uranium naturel (dans les réacteurs à graphite-gaz par exemple) ou après avoir l'avoir enrichi jusqu'à 3% en U^{235} (comme dans les réacteurs à eau), on consomme la plus grande partie de l' U^{235} et un peu d' U^{238} converti en Pu^{239} . En se rapportant à la masse d'Uranium naturel initial, la masse de matière utilisée par ce type d'exploitation est de l'ordre de 1%, le reste constituant un résidu, l'Uranium appauvri en U^{235} (0,2% d' U^{235}), inexploitable par les réacteurs à Uranium naturel. L'intérêt des réacteurs surgénérateurs est de permettre l'exploitation de ces 99% de matière restante, en convertissant l'Uranium appauvri en Pu^{239} , afin d'utiliser celui-ci comme combustible.

En exploitant directement l' U^{235} dans les réacteurs à Uranium naturel d'une part, puis le résidu de cette opération dans les surgénérateurs d'autre part, on parvient ainsi à mobiliser progressivement la plus grande partie de l'énergie potentielle contenue dans l'uranium naturel, tout en réduisant la quantité de déchets.

Dans le premier cas pour parvenir à la fission de l'Uranium 235, il faut ralentir les neutrons par un modérateur. C'est pourquoi, l'eau peut être utilisée comme fluide caloporteur, l'hydrogène étant un excellent modérateur.

Dans le second cas, au contraire, le ralentissement est inutile et même nuisible au but recherché. La seule solution possible pour ne pas ralentir les neutrons est de faire appel à un métal liquide, le sodium par exemple, pour transférer la chaleur du combustible aux générateurs de vapeur. C'est la filière rapide. La haute température en sortie de coeur (500°C) permet d'atteindre des rendements, aussi satisfaisants que ceux des centrales brûlant du charbon ou du fuel.

III-1b. Deux concepts de RNR

Deux conceptions de réacteurs à neutrons rapides ont été réalisées dans le monde.

- Dans le concept à boucles, le coeur est traversé par plusieurs boucles comprenant chacune une pompe, un échangeur et un circuit secondaire. C'est le concept adopté dans le cas de Rapsodie.
- Dans le concept intégré (ou de type piscine), tout le circuit primaire (coeur, pompes et échangeurs primaires) est contenu dans une cuve unique remplie de sodium. C'est le concept utilisé dans le cas de Phenix et de Superphenix.

La suite de l'étude ne porte que sur les réacteurs à neutrons rapides, de type intégré.

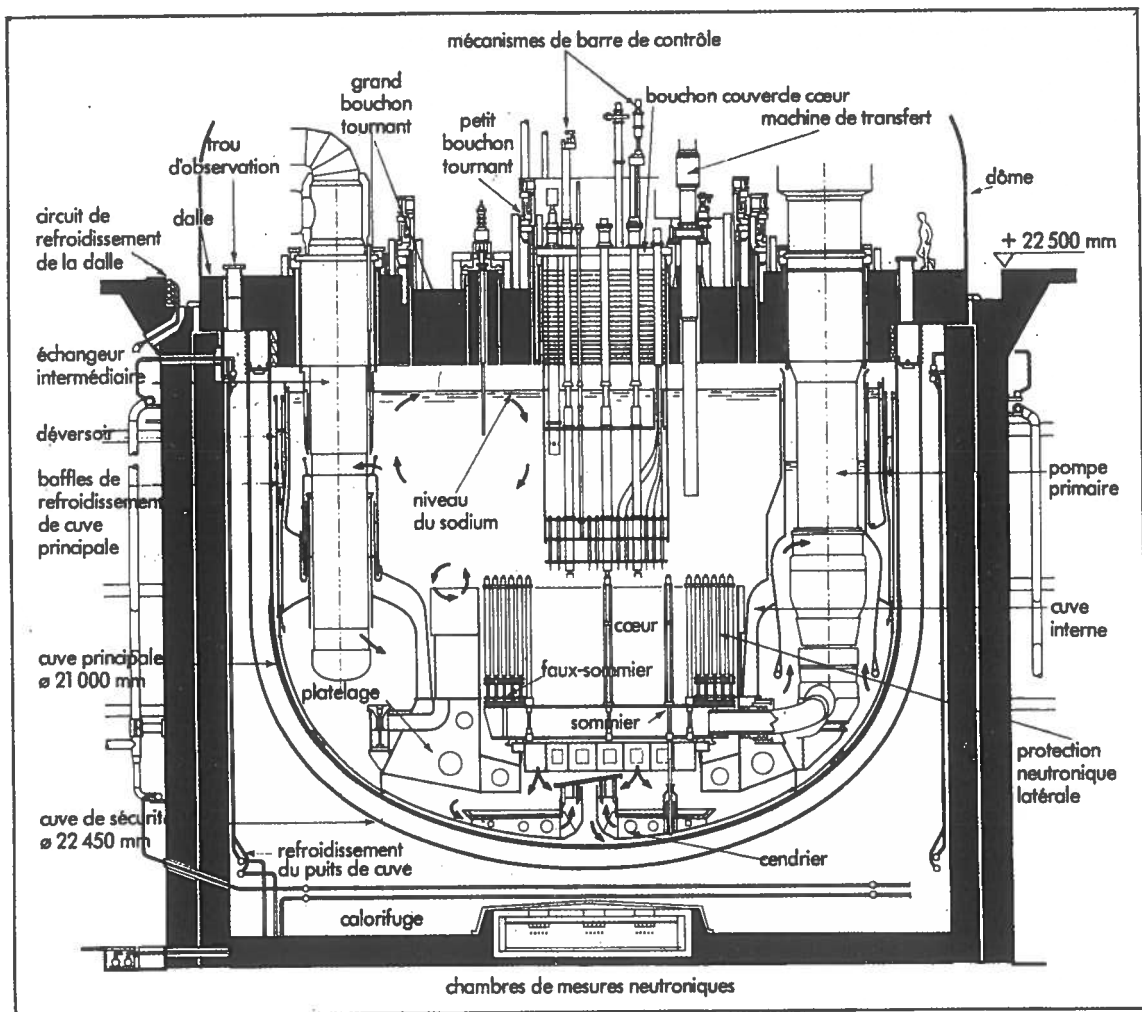


Fig. 1.23- Bloc réacteur de type intégré

III-1c. RNR Phenix

Un réacteur de type intégré contient trois zones principales d'échanges thermiques: le circuit primaire, le circuit secondaire et les générateurs de vapeurs (figure 1.24).

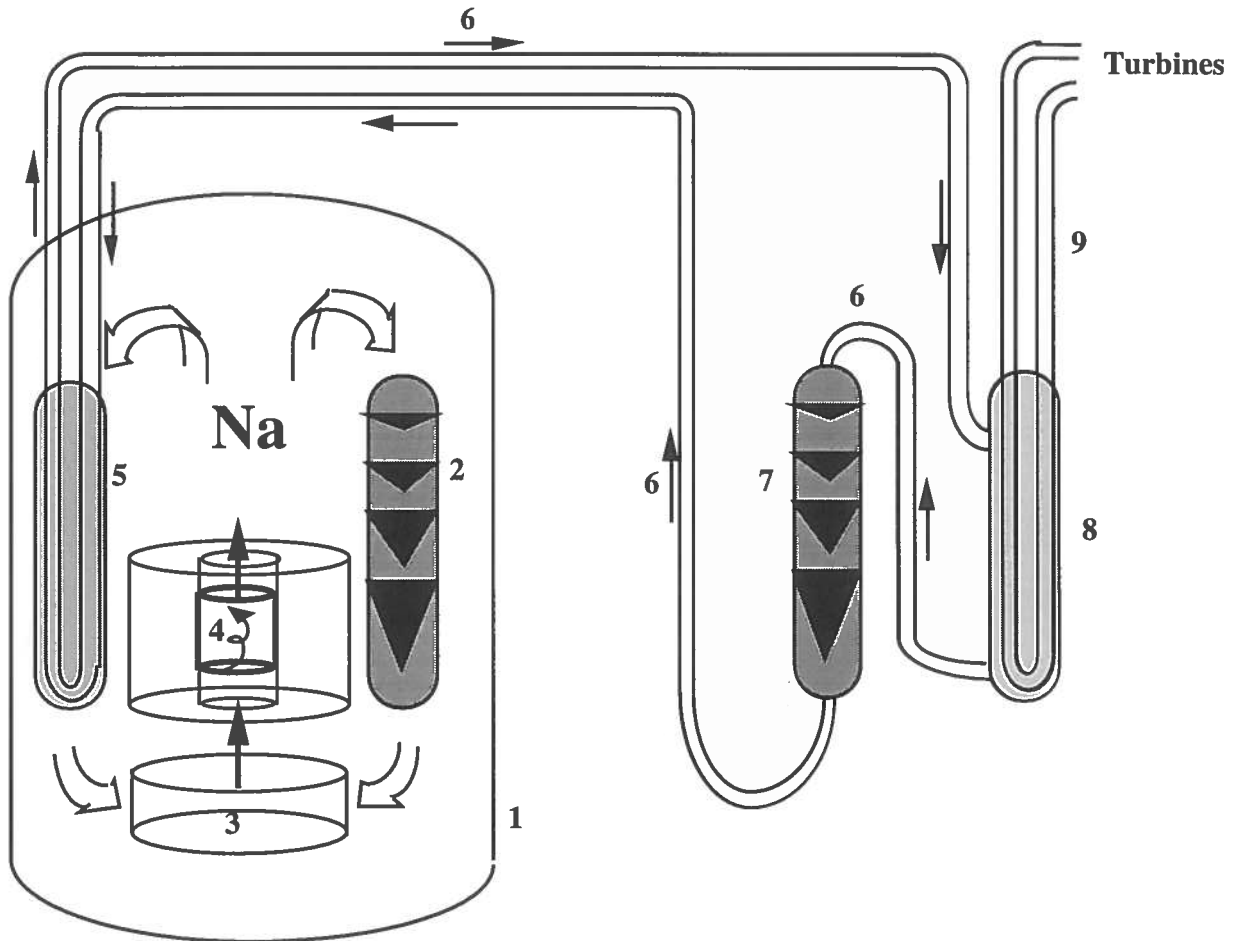


Fig.1.24- Schéma de principe d'une centrale nucléaire avec réacteur à neutrons rapides

- | | | |
|-------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| 1. Circuit primaire de sodium | 4. Coeur | 7. Pompe secondaire |
| 2. Pompe primaire | 5. Echangeur primaire-secondaire | 8. Echangeur secondaire-eau |
| 3. Sommier | 6. Circuit secondaire de sodium | 9. Circuit eau-vapeur |

Le circuit primaire de Phenix est principalement constitué:

- de 3 pompes qui convectent le sodium
- du sommier dans lequel le sodium est guidé radialement vers la base du coeur
- du coeur lui-même dans lequel le sodium se réchauffe en le traversant de bas en haut
- de 6 échangeurs primaires: dans chacun d'entre eux, la chaleur acquise par le sodium en traversant le coeur est transférée à une des trois boucles du circuit secondaire de sodium.
- de 6 barres de contrôles qui, en plongeant dans le coeur, permettent à la fois les fonctions de sécurité (arrêt d'urgence du réacteur) et de compensation (évolution de la réactivité).

Chacun des trois circuits secondaires est constitué:

- d'une pompe de façon à convecter le sodium secondaire
- de 2 échangeurs primaires où le sodium secondaire se réchauffe par échange thermique avec le sodium primaire
- d'un échangeur secondaire par l'intermédiaire desquels le sodium secondaire cède sa chaleur au circuit eau-vapeur.

III-1d. Le coeur du réacteur

Le coeur du réacteur est composé de 3 parties décrites du centre vers la périphérie:

- la partie combustible fissile (contenant de l' UO_2 enrichi et du PuO_2) dans laquelle les réactions nucléaires dégagent la majeure partie de la puissance du réacteur.
- une "couverture" fertile où se forment des noyaux de Plutonium 239 par capture des neutrons dans l'Uranium 238.
- une protection neutronique latérale qui permet d'éviter l'activation du sodium secondaire à son passage dans les échangeurs intermédiaires, en ralentissant puis en capturant les neutrons échappés du coeur.

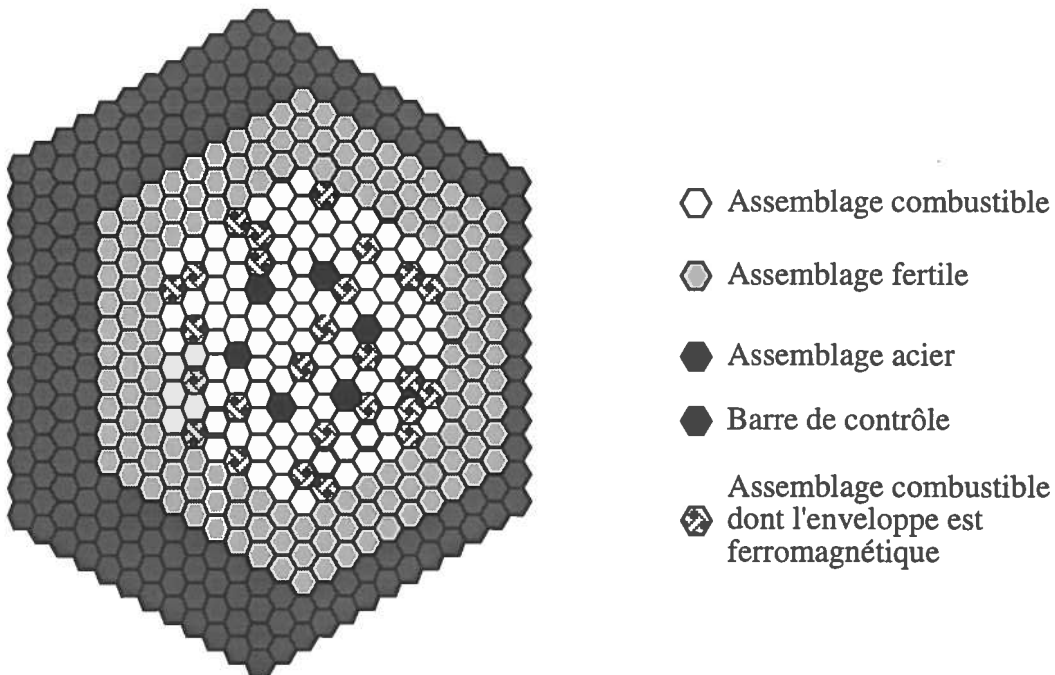


Fig.1.25- Schéma du coeur de Phenix

Les zones combustible et fertile sont constituées d'assemblages de forme hexagonale, fichés à leur base dans le sommier, et à travers lesquels circule le sodium de bas en haut. Les assemblages combustibles au nombre de 103 sont répartis sur 6 couronnes coaxiales. Les assemblages fertiles (une centaine) sont répartis sur les 3 couronnes suivantes.

La zone combustible (en blanc figure 1.25)

Chacun des assemblages combustibles contient 217 aiguilles constituées elles-mêmes par un empilement de pastilles d'UO₂ enrichi et de PuO₂ dans des gaines inoxydables. Le sodium liquide circule à l'intérieur des assemblages, entre les aiguilles. De façon à le laisser circuler, les aiguilles sont séparées entre elles par des fils espaceurs. Chaque aiguille est entourée d'un fil espaceur enroulé de façon hélicoïdale autour de celle-ci (figure 1.26).

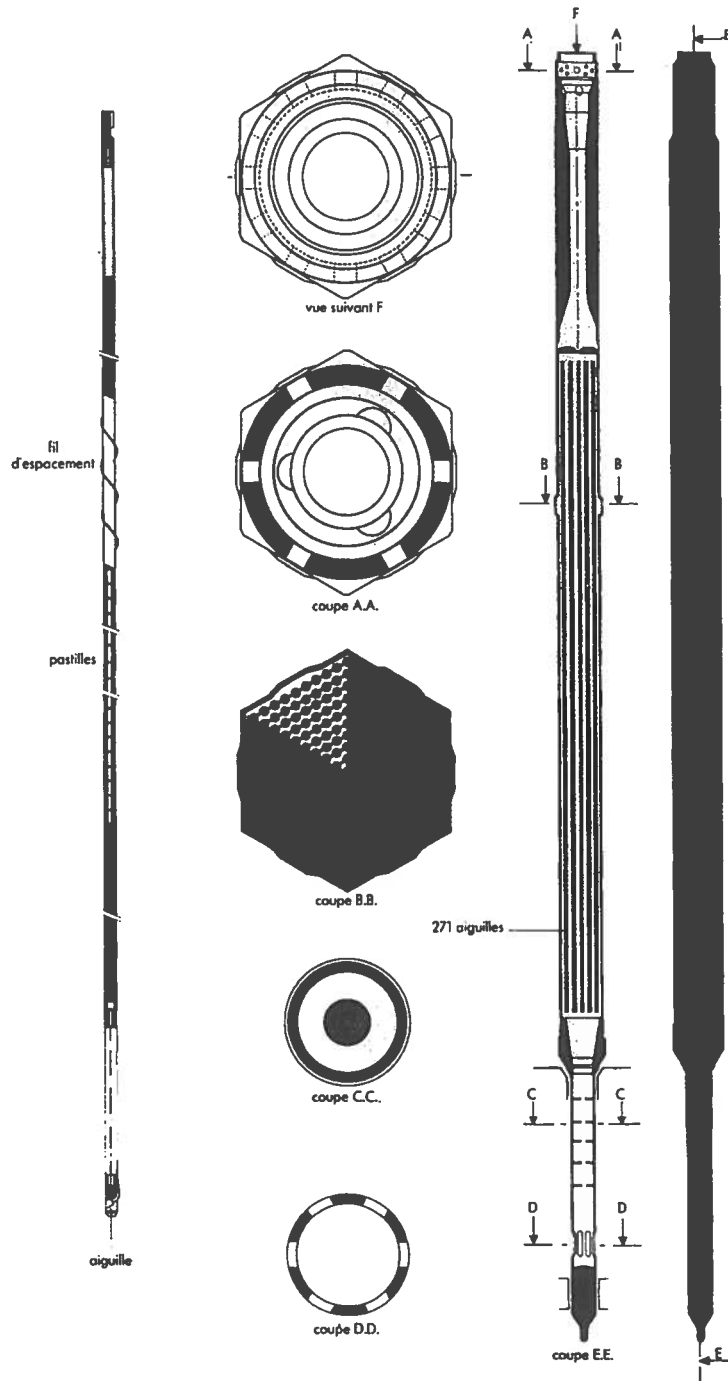


Fig. 1.26- Assemblage combustible contenant 217 aiguilles pour Phenix et 271 pour Superphenix

Dans Phenix, certains assemblages combustibles, pour des raisons de résistance

mécanique, ont une enveloppe constituée d'un matériau ferromagnétique à forte perméabilité magnétique par rapport à celle du vide (facteur de 10^3). Ils sont hachurés sur la figure 1.25.

La zone fertile (en gris clair figure 1.25)

La couverture fertile latérale est constituée d'une centaine d'assemblage dans le cas de Phenix. Ces assemblages comportent 61 aiguilles contenant elles-mêmes des pastilles d'oxyde d'uranium appauvri. Les éléments de structure de ces assemblages (enveloppe, pied, tête) sont identiques à ceux des assemblages combustibles et, comme eux, sont alimentés en sodium par leurs pieds, fichés dans le sommier.

La protection neutronique latérale (PNL)

La protection neutronique latérale est constituée, en partant de la couverture fertile:

- de rangées d'éléments en acier ayant la forme extérieure des assemblages combustibles (même section hexagonale), plantés dans le sommier et refroidis par une circulation forcée de sodium (gris foncé en figure 1.25)
- de rangées de rondins (éléments de section circulaire) plantés dans une structure entourant le sommier et appelée faux-sommier. Ces rondins se refroidissent par convection naturelle. On rencontre successivement des rangées de rondins en graphite, acier, graphite boré.

L'acier utilisé dans la fabrication des éléments de la PNL a une forte perméabilité magnétique par rapport à celle du vide (de l'ordre de 10^3).

Excepté les matériaux ferromagnétiques cités précédemment, les autres matériaux constituant la structure du réacteur ainsi que le sodium liquide ont une perméabilité magnétique du même ordre de grandeur que celle du vide (μ_0).

III-2. Zones du réacteur susceptibles de générer de l'effet dynamo.

Parmi les différentes zones composant les circuits primaire et secondaires d'un RNR, le sommier, le coeur, les pompes primaires et secondaires présentent des configurations d'écoulement favorables à l'effet dynamo, conjuguées à des nombres de Reynolds magnétiques conséquents. En revanche, les échangeurs primaires et secondaires présentent des écoulements quasi 2D (axial) et, en vertu d'un des théorèmes anti-dynamo évoqués au paragraphe II-2i, n'offrent pas de potentiel d'effet dynamo.

III-2a. Bilan comparatif des 4 zones pour Phenix et Superphenix

Le nombre de Reynolds magnétique des différentes zones est évalué pour les réacteurs Phénix et Superphénix:

$$R_m = \sigma \mu V L$$

- La perméabilité magnétique μ est prise égale à celle du sodium.
- La conductivité σ est prise égale à celle du sodium pour une température moyenne entre l'entrée et la sortie de la zone considérée
- La vitesse est évaluée à partir du débit de sodium
- La longueur caractéristique correspond au rayon équivalent de la zone traversée

Le détail de l'évaluation du R_m pour chaque zone en fonction des données figure en Annexe 1.C. Ces évaluations ne présentent qu'une information moyenne. Ils ne tiennent pas compte en particulier des forts gradients de vitesse locaux (pompes), ni de la partition de l'écoulement (coeur)

	Sommier	Coeur	Pompe primaire	Pompe secondaire
PHENIX	15	13	8,1	7
SUPERPHENIX	30	30	14,5	15,8

Tab.1.2- Nombre de Reynolds magnétique pour différentes zones des réacteurs Phenix et Superphenix

III-2b. Le sommier

Le sommier offre une configuration d'écoulement qui rappelle l'expérience menée par Kolm et Mawardi (§II-1i). En effet, le sodium animé par les pompes primaires est dirigé à travers le sommier de façon radiale jusqu'à la base du coeur (figure 1.27). On imagine alors qu'un champ magnétique initial vertical puisse être amplifié par des courants azimutaux induits. Il ne s'agit pas à proprement parler de dynamo puisque si l'on coupe la source de champ magnétique, alors celui-ci s'éteint. En revanche, une amplification devrait toujours être observée, proportionnellement au débit des pompes. Cette hypothèse a donné lieu à une vérification expérimentale sur BN600. Une bobine électrique a été enroulée autour de la cuve du réacteur afin d'y induire un champ magnétique initial, au niveau du sommier. L'évolution des trois composantes de ce dernier fut mesurée au cours du temps. Les principaux résultats et interprétations sont rappelés dans la section III-3.

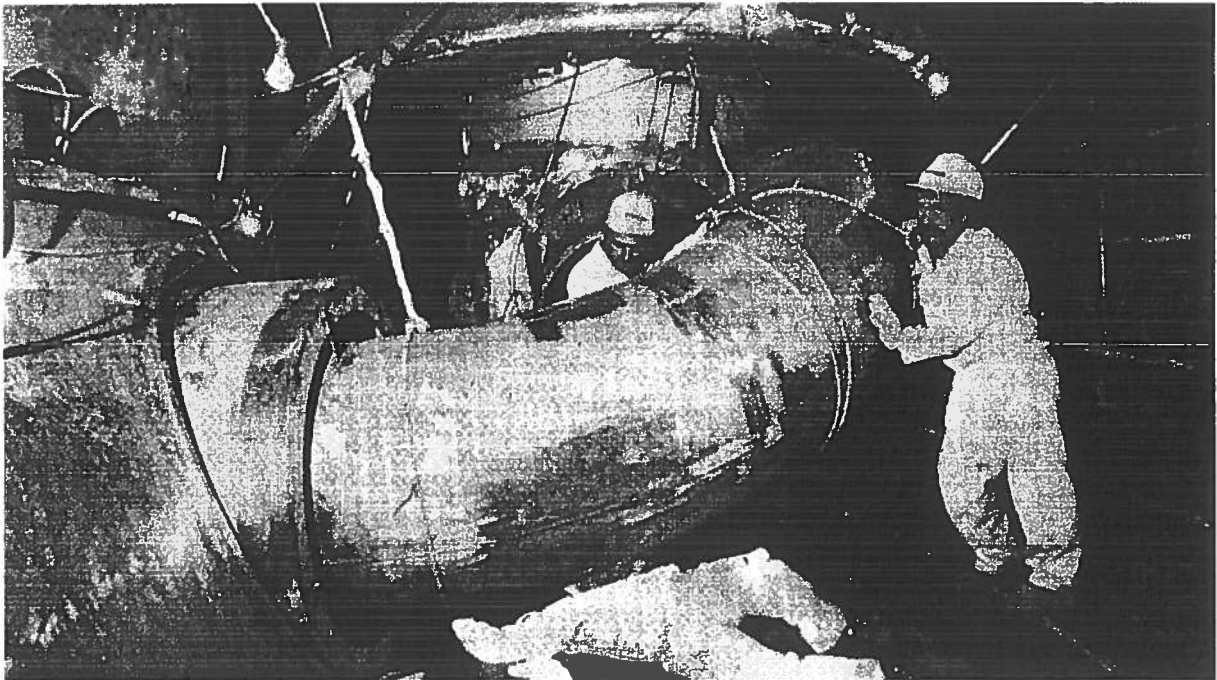


Fig. 1.27- Mise en place d'une tuyauterie de liaison entre pompe primaire et sommier. A gauche, un orifice d'alimentation en sodium du sommier. Au centre en haut, une cheminée de pompe primaire entourant la sphère de refoulement de celle-ci, à laquelle va être soudée la tuyauterie de liaison.

III-2c. Les pompes des circuits primaire et secondaires

Les configurations d'écoulement des pompes des circuits primaire et secondaires sont semblables. Les causes probables de dynamo sont donc les mêmes. Quatre effets ont été envisagés comme susceptibles de générer de l'effet dynamo dans les pompes.

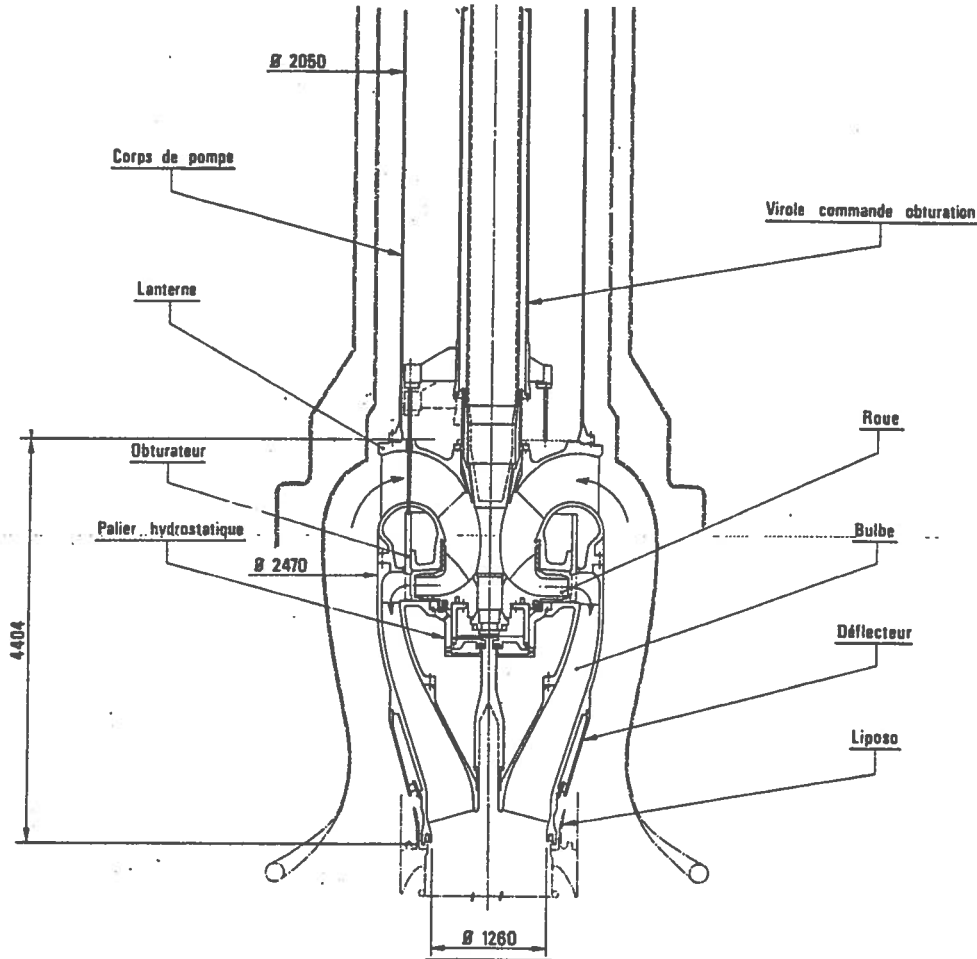


Fig. 1.28- Schéma d'une pompe primaire de Superphenix.

- Le premier concerne l'hélicité de l'écoulement dans le corps de la pompe. En effet, après avoir pénétré dans la lanterne d'aspiration, l'écoulement est propulsé par une roue comportant 6 aubes. En pénétrant dans le bulbe, le sodium a essentiellement un mouvement de rotation pure. Il est ensuite guidé par 7 aubes solidaires du bulbe afin de pouvoir échanger son énergie cinétique de rotation en énergie cinétique de translation axiale. En sortie de bulbe, l'écoulement est donc purement axial. En résumé, l'écoulement dans le bulbe est hélicitaire, avec une densité d'hélicité maximum dans la partie médiane du bulbe, nulle en entrée et en sortie de ce dernier. Ainsi doté d'un caractère hélicitaire et doublé d'un nombre de Reynolds magnétique assez grand (tableau 1.2), l'écoulement dans les pompes possède des caractéristiques semblables à l'écoulement de Ponomarenko et à l'expérience de Gailitis (§II-4a). Cependant, la faible étendue de la rotation du fluide (un quart de période de rotation) handicape fortement la propension d'effet dynamo.

- Le second effet concerne la géométrie conique du bulbe, et les rebouclages de courant dans l'enveloppe de ce dernier [Moreau, 1990]. Nous en dressons une brève description heuristique. Supposons un champ magnétique initial horizontal B_y et un champ de vitesse descendant V_z , une densité de courant $\sigma \mathbf{V} \times \mathbf{B}$ selon Ox est alors induite par la loi d'Ohm dans le fluide conducteur. Le courant se reboucle ensuite préférentiellement dans le corps du bulbe si celui-ci a une conductivité supérieure à celle du fluide. Le trajet suivi par le courant de rebouclage correspond au chemin de moindre résistance électrique, donc au chemin le plus court (figure 1.29b). Du fait de la géométrie conique du bulbe, le courant se reboucle dans un plan non orthogonal à Oz et par conséquent, il en résulte un champ magnétique induit ayant une composant selon Oy (figure 1.29a). Il pourrait ainsi y avoir amplification d'un champ magnétique transversal initial. Ce phénomène est caractérisé par un seuil de vitesse au-delà duquel il prend effet. Il s'agit donc bien d'effet dynamo.

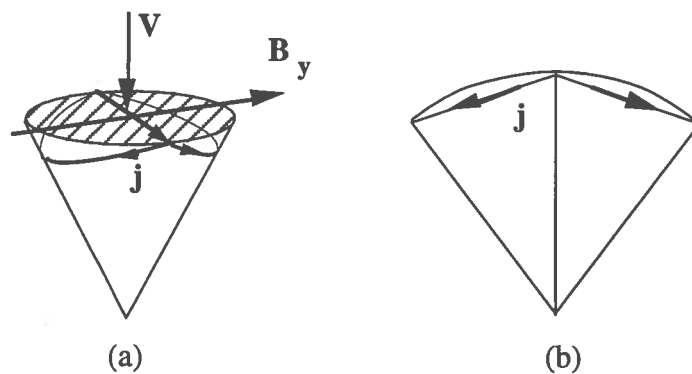


Fig.1.29- Illustration de l'effet dynamo dû à un écoulement dans un convergent. La densité de courant \mathbf{j} suivant le chemin le plus court (b), induit un champ magnétique dans la même direction et de même sens que B_y qui lui a donné naissance (a).

- Le troisième effet est fondé sur l'accélération axiale de l'écoulement provoquée par la géométrie convergente du bulbe [Garnier & Werkoff 1984]. Il y aurait alors amplification d'un champ magnétique transversal initial. Le taux de cette amplification serait croissant en fonction du nombre de Reynolds magnétique de la pompe. Par rapport à la théorie précédente, celle-ci ne présente pas d'effet de seuil de vitesse des pompes au-delà de laquelle il y aurait amplification. Ce n'est donc pas une dynamo.

- Le quatrième effet concerne l'apparition d'effet dynamo au-delà d'un certain nombre de Reynolds critique, en écoulement fortement turbulent, dans lequel les tourbillons à petite échelle peuvent générer, par effet dynamo, du champ magnétique à grande échelle. Ce phénomène de "cascade inverse" [Frisch et al 1975] permet d'expliquer la génération de champ magnétique à l'échelle astrophysique et pourrait avoir lieu dans les pompes primaires ou secondaires, à cause notamment des forts gradients de vitesse présents le long de la paroi du bulbe et de l'hélicité de l'écoulement.

Pour l'exploitant du réacteur, la présence d'effet dynamo ou d'amplification du champ magnétique dans une pompe n'est pas souhaitable. En effet, elle peut entraîner la création de pertes de charges supplémentaires et la perturbation des appareils de mesure et de surveillance. Deux séries de mesures expérimentales ont donc été menées en France, l'une sur une pompe secondaire de Phenix, l'autre sur les 4 pompes secondaires de Superphenix, de façon à évaluer l'influence réelle des phénomènes évoqués.

III-2d. Le coeur du réacteur

Le coeur est constitué d'une centaine d'assemblages, chacun d'entre eux comprenant 217 aiguilles (271 pour Superphenix). Le sodium circulant entre les aiguilles est guidé par les fils espaceurs enroulés de façon hélicoïdal autour de chaque aiguille (figure 1.24). Il en résulte un caractère fortement hélicitaire de l'écoulement. Une évaluation du nombre de Reynolds magnétique à l'échelle d'une aiguille ou d'un assemblage donne des valeurs nettement inférieures à celle correspondant au seuil d'excitation dans le cas d'un écoulement hélicoïdal. Cependant, l'accumulation d'hélices les unes à côté des autres, pourraient donner lieu à une amplification du champ magnétique. L'écoulement de G.O. Roberts, par exemple, où les hélices sont alternées, montre la possibilité d'un tel phénomène [Roberts, 1972], [Busse et Müller 1995].

D'autre part, la présence d'éléments de perméabilité magnétique et de conductivité différentes peuvent induire des modifications dans les trajectoires des lignes de champ et de courant et peut-être générer une amplification locale du champ magnétique.

III-2e. Bilan des essais entrepris sur les Réacteurs à Neutrons Rapides

Quatre séries d'essais ont été entreprises sur trois réacteurs différents.

	Sommier	Coeur	Pompe primaire	Pompe secondaire
PHENIX (250 MW)		CEA- Cadarache 1992- 95		Garnier & Werkoff, 1984-87
BN600 (600 MW)	Kirko & al, 1980		Kirko & al, 1980	
SUPERPHENIX (1200 MW)				LEGI- Grenoble 1994-95

Tab. 1.3- Bilan des différentes séries de mesures MHD entreprises sur les RNR

- La première, sur le circuit primaire de BN600 [Kirko 1984], a donné lieu à l'élaboration d'une nouvelle théorie d'amplification d'énergie magnétique: la semi-dynamo, mixant les effets thermoélectriques, et un double effet α dû à la dissymétrie de l'écoulement de sodium dans le sommier. Une prédiction de pertes de charge dues à une semi-dynamo équivalente pour un réacteur de la taille de Superphenix montre que les perturbations à attendre sont de l'ordre de 2‰ [Garnier 1986]. Les résultats sont brièvement commentés dans la section III-3.
- La seconde, sur un circuit secondaire de Phenix [Werkoff et Garnier 1987], avait pour but principal de confronter les théories dynamo ou d'amplification du champ magnétique terrestre émises sur l'écoulement dans les pompes. Les résultats sont brièvement commentés dans la section III-4.
- Pour la troisième, des bobines ont été introduites au-dessus du coeur de Phenix (instrumentation réalisée au CEA Cadarache), afin de surveiller l'évolution de la partie oscillatoire du champ magnétique. L'emplacement choisi pour des raisons pratiques permet essentiellement de mesurer des effets thermoélectriques ou bien de mettre en évidence éventuellement la partie oscillatoire d'un champ magnétique généré par un dynamo à grande échelle. Les mesures sont en cours de réalisation. De façon à mesurer la composante moyenne du champ, un capteur supplémentaire de type flux-gate sera introduite prochainement.
- La quatrième, sur un circuit secondaire de SuperPhenix [Prudhon et al 1994] [Alemany et Marty 1995], avait pour but principal d'examiner s'il pouvait y avoir effet dynamo ou amplification du champ magnétique ambiant par l'écoulement dans les pompes. Les mesures ayant été réalisées au cours d'un redémarrage de la Centrale, le découplage température débit a permis de présenter des résultats à basse température où le nombre de Reynolds magnétique était sensiblement plus élevé que celui atteint sur Phenix en 1987.

III-3 Mesures sur BN600

III-3a. Description du dispositif expérimental

Les deux zones d'investigation étant pompe primaire et sommier, les sondes magnétiques ont été disposées dans l'intercuve, une première partie le plus près possible d'une des pompes primaires et une seconde partie le long de la direction de refoulement du sodium de cette dernière dans le sommier (5).

De façon à provoquer artificiellement une source de champ magnétique extérieure, deux bobinages électriques ont été placés dans l'intercuve (2). L'un (3) induit un champ magnétique transversal dans la pompe primaire investie, l'autre (4) induit un champ magnétique axial dans le sommier.

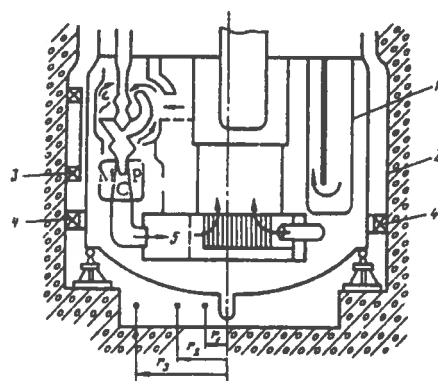


Fig. 1.30- Essais sur BN600. Emplacement des bobines (3) et (4) et d'une série de capteurs à des distances respectives r_1 , r_2 et r_3 du centre.

III-3b. Interprétation des résultats

Les campagnes de mesures successives effectuées sur BN600 au début des années 80, ont donné lieu à la rédaction de plusieurs rapports dont les principales conclusions sont rappelées ci-après.

Courants d'origine thermoélectrique [Scheinkman et al , non daté] [Kirko 1982]

Le circuit primaire dans son ensemble semble fonctionner comme un gros générateur de courant d'origine thermoélectrique. En effet, par les forts gradients de température régnant dans le coeur et les échangeurs de chaleur, ces derniers fonctionnent comme un gigantesque thermocouple, générant des courants pouvant atteindre plusieurs milliers d'Ampère. Ces derniers, se rebouclant dans les pompes primaires et dans le sommier, peuvent ensuite, compte-tenu des géométries particulières de l'écoulement dans ces régions, participer à la génération de champ magnétique soit par simple effet d'induction (dans les pompes primaires) soit comme partie intégrante d'un processus (semi-dynamo dans le sommier) détaillé dans la suite.

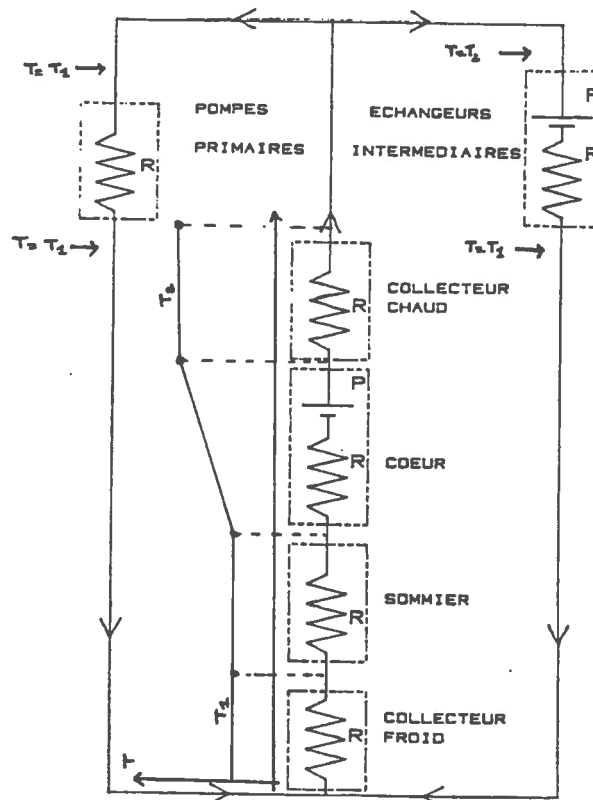


Fig. 1.31- Equivalent thermoélectrique du bloc réacteur.
(R: résistance, P: f.e.m., >: intensité électrique)

La pompe primaire [Kirko 1984]

- Dans la pompe primaire, des courants de l'ordre de 240 A ont été mesurés. Ils sont attribués à des recirculations de courants d'origine thermoélectrique générés dans les échangeurs et le coeur. En effet, à puissance nulle du réacteur (faibles gradients thermiques) ou à puissance nulle des pompes (pas d'effet d'entraînement des boucles de champ et donc de courant), ces courants disparaissent. Ces courants thermoélectriques (principalement de direction axiale) induisent ensuite un champ magnétique (azimutal), une forte corrélation entre ces derniers ayant été mesurée.

- Un effet d'entraînement du champ magnétique par la géométrie conique du bulbe de la pompe primaire a été observé. En effet, l'angle entre B_r et B_θ correspond à celui du demi-angle au sommet des génératrices externes du bulbe. Cet effet d'entraînement est attribué à un phénomène de "gel" du champ magnétique par les forts gradients de vitesse présent le long de la paroi du bulbe. Dans le contexte astrophysique, ce phénomène est à l'origine d'effet dynamo.

- Dans le cas de la pompe primaire, une amplification de l'amplitude des oscillations de B_r a été observée, à partir d'un seuil critique de puissance des pompes d'une part, cette amplification étant croissante en fonction de la puissance du réacteur d'autre part. Le facteur d'amplification du champ magnétique mesuré par rapport au champ magnétique initial induit par la bobine verticale est de l'ordre de 10^3 .

Cette amplification pourrait être attribuée

- 1) au phénomène de "gel" dans le bulbe de la pompe cité précédemment. Cependant, d'après les mesures expérimentales, seule la composante radiale B_r est affectée, ce qui contredit cette hypothèse (en effet, B_θ et surtout B_z devraient aussi être affectés).

- 2) à un transfert de B_z en B_r du fait d'un gel relatif des lignes de champ magnétique entraînées par la dispersion de l'écoulement en sortie de coeur. Il pourrait ainsi en résulter par diffusion dans les pompes primaires une adjonction de B_r . Cette justification est cohérente à la fois avec le fait que seul B_r soit affecté et aussi avec le fait que l'amplification apparaisse à partir d'un seuil de puissance des pompes (entraînant le "gel" du champ).

La croissance de l'amplitude des oscillations du champ en fonction de la puissance du réacteur peut aussi trouver sa justification dans le processus de semi-dynamo présenté ci-après.

Enfin, il faut noter que le comportement de B_r est justifiable par un phénomène tel que celui cité dans la partie III-2c. Il s'agit alors d'une dynamo (seuil de puissance de la pompe) due à la convergence de l'écoulement dans le bulbe. Cependant, la croissance de B_r en fonction de la puissance du réacteur n'est alors pas évidente à justifier.

Le sommier [Kirko 1984]

L'hypothèse de l'existence d'une semi-dynamo dans le sommier du réacteur repose d'une part sur la présence de forts courants d'origine thermoélectriques et d'autre part sur la non axisymétrie de l'écoulement dans le sommier.

Des courants d'origine thermoélectriques de l'ordre de 2000A ont été mesurés dans le sommier. Ils correspondent bien aux prédictions théoriques de thermoélectricité en considérant le coeur et les échangeurs de chaleur comme sources principales. En supposant donc l'existence d'un courant électrique axial J_z dans le sommier, nous allons montrer comment, du fait de la non axisymétrie de l'écoulement, un champ magnétique azimuthal peut être amplifié.

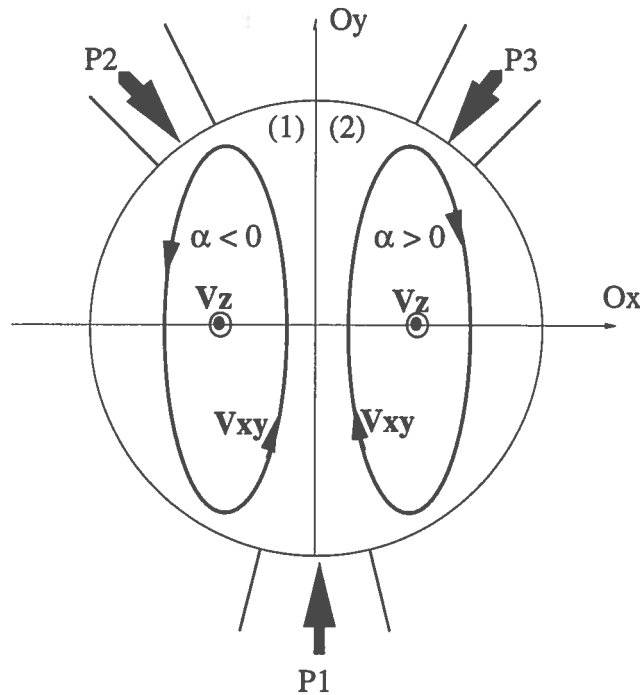


Fig. 1.32- Ecoulement secondaire dans le sommier provoqué par le refoulement dissymétrique des pompes P_1 , P_2 , P_3 . Le cercle représente le bord du sommier.

Supposons que les pompes soit disposées comme sur la figure 1.32 (c'est le cas de BN600). Alors, deux boucles de recirculation se forment, dans des sens de rotation opposés, divisant le sommier en deux régions (1) et (2). La conséquence magnétohydrodynamique de cette configuration d'écoulement est la possibilité, s'ils existent, d'avoir deux effets α opposés ($\alpha \neq -\mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v}$), l'un positif dans la région (2) et l'autre négatif dans la région (1).

Considérons une densité de courant d'origine thermoélectrique \mathbf{j}_z (figure 1.33a). Cette dernière induit un champ magnétique azimuthal B_θ dans le sommier (figure 1.33a). Par un premier effet α , B_θ génère deux boucles de courant \mathbf{j}_1 et \mathbf{j}_2 (figure 1.33b). Ces boucles de courant induisent à leur tour un champ magnétique B_z positif dans la région (2) et négatif dans la région (1). Par un second effet α , B_z génère un courant électrique \mathbf{j}_z s'ajoutant au courant thermoélectrique initial. Il est donc possible, par deux effets alpha simultanés, d'amplifier un champ magnétique azimuthal initial induit par des courants thermoélectriques.

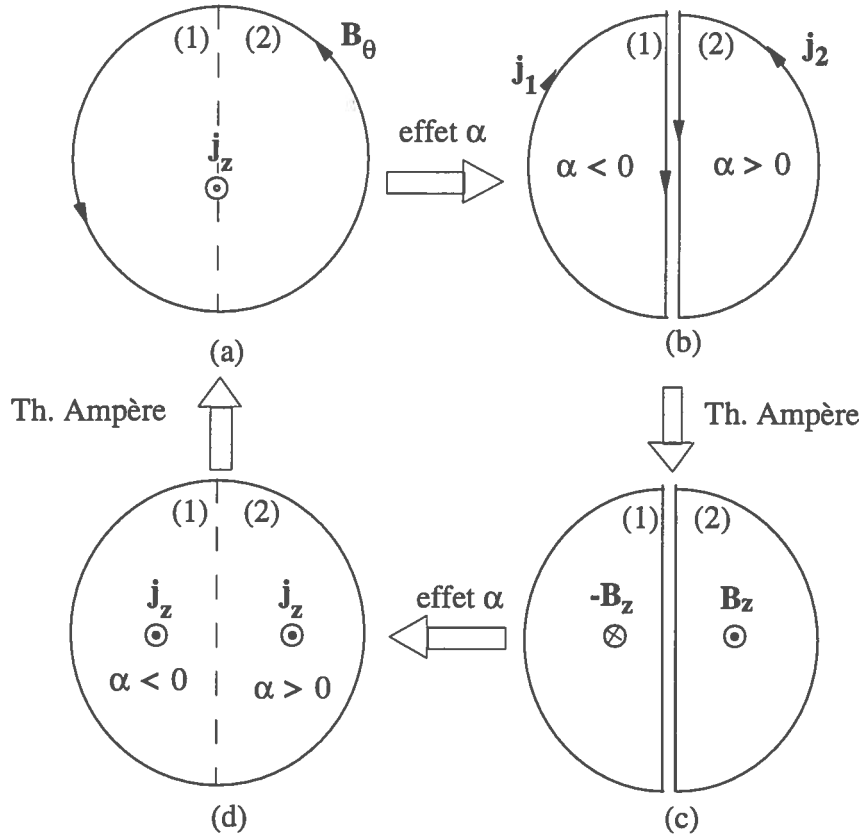


Fig. 1.33- Mécanisme de génération de champ magnétique dans le sommier

Cependant, au fur et à mesure que le champ magnétique initial augmente, un effet de retour sur l'écoulement a lieu et, en perturbant ce dernier, supprime l'effet qui lui a donné naissance (notamment les deux boucles de convection). Le taux d'amplification du champ magnétique est donc limité. La plage de fonctionnement de cette semi-dynamo a été évaluée de façon empirique à partir du nombre de Ludmilla défini comme suit:

$$Lu = R_m \sqrt{\frac{\text{densité magnétique d'origine thermoélectrique}}{\text{densité d'énergie cinétique}}} = R_m \sqrt{\frac{\alpha_0^2 \Delta T^2 \sigma^2 \mu_0}{\rho V_0^2}}$$

$$\text{où } \begin{cases} \alpha_0 = \text{pouvoir thermo-électrique du couple sodium-inox} \\ \Delta T = \text{écart de température caractéristique} \\ \rho = \text{densité de sodium} \end{cases}$$

Dans le cas du réacteur BN600, l'état d'auto-excitation est prévu pour:

$$2 < Lu < 4$$

Cet état n'a pas été atteint lors des essais sur BN600 où pourtant, pour une meilleure dissymétrie de l'écoulement, deux pompes seulement sur les trois étaient en fonctionnement. Cependant, un état voisin du début du déclenchement du mécanisme de la semi-dynamo a pu être détecté.

Une reprise de cette étude avec les valeurs numériques du réacteur Superphenix a conduit aux remarques suivantes [Garnier 1986]:

- 1) Les 8 refoulements correspondant aux 4 pompes de Superphenix induisent un écoulement axisymétrique, contrairement aux 3 pompes de BN600 placées de façon dissymétriques. L'hypothèse principale sur laquelle repose la semi-dynamo n'est donc pas vérifiée en fonctionnement normal. De plus, des études d'hydraulique fine dans le sommier de Superphenix remettent en cause les théories de sectorisation en 2 parties de l'écoulement dans le sommier.
- 2) Cependant, en supposant que cette hypothèse soit tout de même valable (par exemple si 3 pompes sur 4 fonctionnent), une estimation exagérée des conséquences des effets TEMHD (Thermo-Electrique-Magnéto-Hydro-Dynamique) montre que Superphenix au régime nominal est en deçà de la zone critique d'auto-excitation.
- 3) Enfin, une estimation des perturbations à attendre de ces effets en cas d'auto-excitation sont de l'ordre de 2‰ de la puissance de pompage.

III-4. Mesures sur Phenix

III-4a. Description du dispositif expérimental

De façon à induire un champ magnétique transverse dans la pompe secondaire, 2 bobines d'Helmholtz, d'axes confondus ont été placées de part et d'autre de la sortie de la pompe.

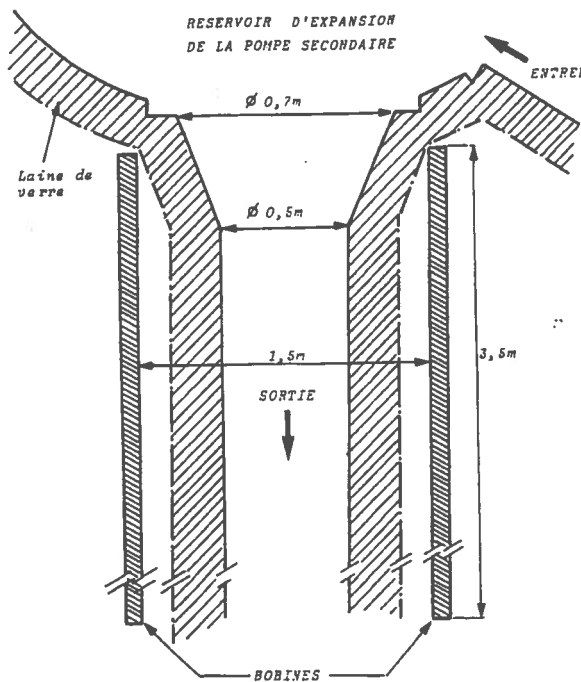


Fig. 1.34- Implantation des bobines (expérience Héliopolis)

III-4b. Interprétation des résultats [Werkoff & Garnier 1987]

- Cet essai, baptisé "Héliopolis" et réalisé autour d'une pompe secondaire de Phenix avait pour objectif de vérifier l'hypothèse théorique énoncée en section III-2c. Aucun effet dynamo n'a été décelé.

- Par des mesures de potentiel directement sur la tuyauterie en sortie de pompe secondaire de Phenix, un effet d'entraînement du champ magnétique transversal généré par les deux bobines placées juste au-dessus, a été mis en évidence. Cet essai a permis de montrer le principe d'un débitmètre non intrusif avec une sensibilité meilleure que 1%.

- En mesurant le champ magnétique près du refoulement de la pompe secondaire de Phenix, l'existence de courants thermoélectriques dans la boucle du circuit secondaire a été mise en évidence. Les différences de potentiel de l'ordre du millivolt créées par les phénomènes thermoélectriques entre les zones froides et chaudes peuvent en effet conduire à des courants de grande intensité à cause de la très faible résistance des sections de sodium liquide de grand diamètre.

III-5. Mesures sur Superphenix

III-5a. Description du dispositif expérimental [Prudhon et al 1994]

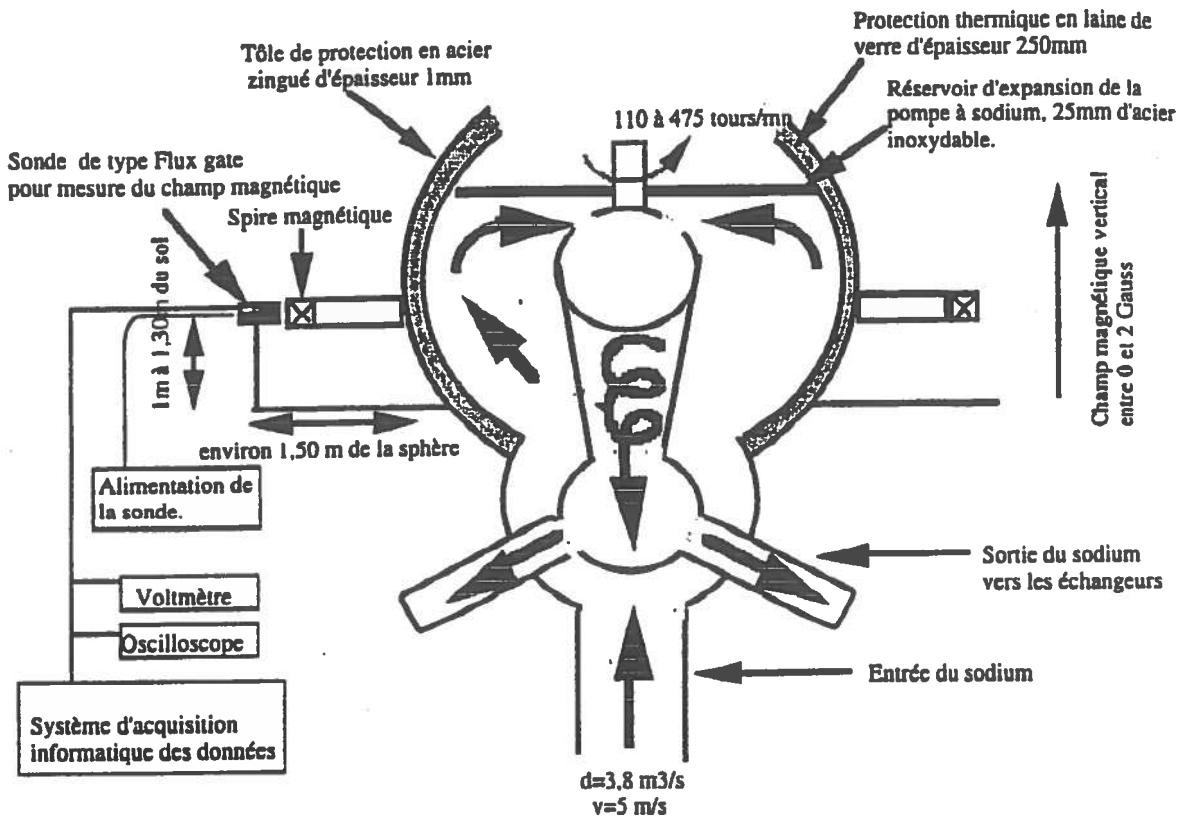


Fig. 1.35- Montage expérimental réalisé pour la mesure des perturbations magnétiques au voisinage des pompes secondaires de SuperPhenix

Deux séries d'essais ont été réalisées à l'occasion de la remise en route des quatre pompes secondaires, avec ou sans bobine inductrice extérieure. En présence d'un courant dans la bobine, un champ magnétique axial était induit dans la pompe secondaire. Le comportement de ce dernier a été mesuré après coupure brutale du courant dans la bobine.

Les mesures réalisées avec des flux-gates ont permis d'accéder aux parties continue et fluctuante du champ magnétique.

III-5b. Interprétation des résultats [Alemany et Marty 1995]

Les mesures n'ont pas révélé d'effet dynamo. Cependant, un accroissement du temps de déclin de l'énergie magnétique en fonction de la vitesse débitante dans la pompe a été observé. Une extrapolation des résultats montre que le seuil d'auto-excitation correspondrait à un débit de la pompe égal à cinq fois son débit nominal.

Annexe 1A

A more realistic model of the Rikitake dynamo

(soumis à Nonlinearity, Novembre 1995)

Plunian F., Marty Ph., Alemany A.
LEGI-IMG, Centre National de la Recherche Scientifique
BP 53 X, 38041 Grenoble Cedex FRANCE

Abstract. - The paper deals with two deficiencies of the Rikitake dynamo which can lead, as pointed out by previous authors, to non physical results. Indeed, without allowing azimuthal current distribution, the system transgresses one fundamental electromagnetic theorem, in the limit of perfect electrical conductor discs. Without mechanical friction coefficients, the system is structurally unstable which is not physically realistic. A corrected version of the Rikitake dynamo is proposed, taking into account both azimuthal currents in the discs and symmetric mechanical friction coefficients. The linear stability of the steady-state is analysed and a time-dependant solution is numerically computed in one unstable case, in order to see if this more physically realistic model can still present the typical chaotic reversals observed with the traditional description of the Rikitake dynamo.

Key words. - Disc-dynamo; Earth magnetic field reversals; Linear stability analysis; Nonlinear model; Dynamo model; Magnetohydrodynamics; Magnetic field generation; Chaotic time solutions.

1- Introduction

The homopolar disc dynamo (Bullard, 1955) and the bipolar disc dynamo (Rikitake, 1958) models have been widely investigated. The first one, known for its pedagogic interest, presents typical features of fluid dynamos (Moreau, 1990). The second one presents unstable solutions having a chaotic behaviour which has been compared to the Earth magnetic field reversals (Cook, 1970). However, the conventional assumptions on both systems have been criticized and revealed as over-simplified.

The conventional description of the homopolar disc-dynamo appears as misleading from fundamental considerations (Moffatt, 1979). Indeed, the magnetic flux through the disc is found to have exponential growth even in the limit of perfect disc conductivity. When conductivity tends to infinity, this violates a fundamental result of electromagnetic theory demanding that the flux through any closed curve moving with the conductor must be conserved. Therefore, this magnetic flux should remain constant in this limit. To solve that contradiction, Moffatt proposes to consider an azimuthal current distribution in the disc itself. For easier formulation, the disk is segmented in such a way

that current is concentrated only at the neighbourhood of the the rim of the disc.

In the conventional description of the bipolar disc-dynamo, the mechanical friction is neglected. This assumption has been shown to be unwarranted (Hide, 1995), as the system is then structurally unstable and therefore physically unrealistic. Moreover, if the same mechanical friction is taken for the two discs, then the chaotic oscillations are impossible to be reproduced, for the two discs must rotate with the same speed. The only hope to find such chaotic behaviour could be in asymetry of the mechanical friction coefficients.

The objective of the present paper is to present a new modelisation of the Rikitake dynamo taking into account both azimuthal currents and symetric mechanical friction. Attention has been concentrated to know if this more realistic model can still present unstable behaviour. A mathematic formulation is presented, followed by a linear stability analysis of the steady-state. One computational illustration of the unstable case is finally proposed.

2- Characteristics of the system

The system is composed of two coupled disc-dynamos (figure 1). In order to avoid an overloaded writing, equations are written, if possible, for the disc-dynamo (i), i being equal to 1 or 2. The antagonist disc-dynamo is called (j). Each disc-dynamo (i) is made of an axis of rotation, a disc and a wire, each one made with the same conducting materials. These three elements constitute a closed electrical circuit (C_i), the wire being in sliding contact with the rim of the disc at one end and with the axis at the other end. Electromagnetic coupling between the two disc-dynamos is made by the loop of each wire around the axis of the antagonist disc-dynamo. Both disc-dynamos are considered to be far enough from each other to neglect any other interaction. The circuit constituted by the rim neighbourhood of each disc-dynamo (i), in which the azimuthal current is concentrated, is called (D_i). The set of parameters and unknowns is listed below.

The system depends on 16 parameters. For each disc-dynamo (i), a given mechanical torque $G_i/2\pi$ is applied from outside onto the axis. The inertia momentum of each disc-dynamo (i) is $J_i/(2\pi)^2$, its friction coefficient being $k_i/(2\pi)^2$. The circuit (D_i) has an electrical resistance R_{D_i} and a self-inductance L_{D_i} . The circuit (C_i) has an electrical resistance R_{C_i} and a self-inductance L_{C_i} . The mutual inductance between (C_i) and (D_j) is M_{j_i} .

There are 10 system unknowns: currents I_{C_i} in (C_i) and I_{D_i} in (D_i), magnetic flux Φ_{D_i} through (D_i) and Φ_{C_i} through (C_i), angular velocity $2\pi\Omega_i$ of each disc (i). In order to have a complete mathematical formulation of the problem, 10 independant equations describing relations between the unknowns are needed.

3- Formulation

3.1- Equations of the problem

The electric field created by the magnetic field B_i , assumed vertical and axisymmetric on the surface of the disc (i), is written at any point $M(\mathbf{r})$ of the disc, \mathbf{r} being the radial cylindrical coordinate:

$$(1) \quad \mathbf{E}(M) = 2\pi\Omega_i B_i \cdot \mathbf{r},$$

giving birth to a potential difference between the axis and the rim of the disc:

$$(2) \quad \Delta V = \Omega_i \Phi_{Di}$$

with
$$\Phi_{Di} = 2\pi \int_0^R B_i \cdot r \cdot dr .$$

Therefore, the electrical equation for the circuit (i) is given by:

$$(3) \quad \Omega_i \cdot \Phi_{Di} = R_{Ci} \cdot I_{Ci} + \dot{\Phi}_{Ci} ,$$

and the electrical equation for (D_i) is reduced to:

$$(4) \quad R_{Di} \cdot I_{Di} = - \dot{\Phi}_{Di} .$$

The magnetic flux through (C_i) is coming from its self inductance for one part, added to induction from (D_j) for another part. Therefore, it comes out that ($i \neq j$ being intended) :

$$(5) \quad \Phi_{Ci} = L_{Ci} \cdot I_{Ci} + M_{ji} \cdot I_{Dj}$$

and in the same manner, we have:

$$(6) \quad \Phi_{Di} = L_{Di} \cdot I_{Di} + M_{ij} \cdot I_{Cj} .$$

The mechanical equation of the disc-dynamo (i) is written

$$(7) \quad \frac{J_i}{(2\pi)^2} \cdot \frac{d(2\pi \cdot \Omega_i)}{dt} = \sum \text{Torques applied to the disc (i)} .$$

The Lorentz force momentum is added to the torque $G_i / 2\pi$ and the friction momentum $-\Omega_i k_i / 2\pi$:

$$(8) \quad d^2 \mathbf{F}_{Lor.} = dI_{Ci} \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_i .$$

Then, we have:

$$(9) \quad M_{Lor.}^{tum} = -I_{Ci} \cdot \frac{\Phi_{Di}}{2\pi} .$$

Therefore, (7) is written:

$$(10) \quad J_i \dot{\Omega}_i = G_i - \Phi_{Di} \cdot I_{Ci} - k_i \Omega_i .$$

Consequently, equations (3), (4), (5), (6) and (10) completely describe the system with 10 equations and 10 unknowns.

3.2- The power balance

The power balance of the complete system is written:

$$(11) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1, j \neq i}^2 G_i \Omega_i = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1, j \neq i}^2 \left[R_{Ci} I_{Ci}^2 + R_{Dj} I_{Dj}^2 + k_i \Omega_i^2 + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} L_{Ci} I_{Ci}^2 + \frac{1}{2} L_{Dj} I_{Dj}^2 + M_{ji} I_{Ci} I_{Dj} + \frac{1}{2} J_i \Omega_i^2 \right\} \right]$$

It expresses that the mechanical power is shared between heat power (Joule effect plus mechanical friction) and growth of magnetic plus kinetic energy. Nevertheless, the power balance can be splitted in two parts:

$$(12) G_i \Omega_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_i \Omega_i^2 \right) - k_i \Omega_i^2 = R_{Ci} I_{Ci}^2 + R_{Dj} I_{Dj}^2 + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} L_{Ci} I_{Ci}^2 + \frac{1}{2} L_{Dj} I_{Dj}^2 + M_{ji} I_{Ci} I_{Dj} \right\}.$$

This gives a good idea of interaction between the two disc-dynamos: if we divide the global system into two windows A and B as shown on figure 1, it appears that the left-hand side of equation (12) represents for $i=1$ the mechanical ingredients of window A, whereas the right-hand side represents the electrical ingredients of window B. Therefore, the magnetic energy of one window is fed by the mechanical power of the other one.

3.3- The inadequacy of the conventional formulation

Conventional formulation of the double disc-dynamo is given by the following system:

$$(13) \begin{cases} \Omega_i \Phi_{Di} = R_{Ci} \cdot I_{Ci} + \dot{\Phi}_{Ci} \\ \Phi_{Ci} = L_{Ci} \cdot I_{Ci} \\ I_{Di} = 0 \\ \Phi_{Di} = M_{ij} \cdot I_{Cj} \\ J_i \dot{\Omega}_i = G_i - \Phi_{Di} \cdot I_{Ci} - k_i \Omega_i \end{cases}$$

R_{Ci} being the electric resistance of the disc and of the loop. The currents in the discs are only radial.

The previous system gives:

$$(14) \quad \Omega_i (G_i - k_i \Omega_i) = R_{Ci} I_{Ci}^2 + \frac{1}{2} L_{Ci} \frac{d}{dt} (I_{Ci}^2) + \frac{1}{2} J_i \frac{d}{dt} (\Omega_i^2)$$

Now, suppose that the disc(i) is driven at constant velocity ($\Omega_i = \text{constant}$), then:

$$(15) \quad I_{Ci}^2 = \frac{\Omega_i (G_i - k_i \Omega_i)}{R_{Ci}} + A \exp\left(-\frac{2R_{Ci}}{L_{Ci}} t\right)$$

$$(16) \quad \Phi_{Dj} = M_{ij} \sqrt{\frac{\Omega_i (G_i - k_i \Omega_i)}{R_{Ci}} + A \exp\left(-\frac{2R_{Ci}}{L_{Ci}} t\right)}$$

The inadequacy of the conventional description is then clearly revealed by considering the limit case when $R_{Ci} \rightarrow 0$ (Moffatt, 1979). Indeed, for $G_i \neq k_i \Omega_i$, $\Phi_{Di} \rightarrow +\infty$, whereas it should remain constant.

Considering the presence of the azimuthal currents, this inadequacy vanishes. Indeed, as $R_{Di} \rightarrow 0$, equation (4) yields that Φ_{Di} remains constant (irrespective of the value of R_{Ci} and assumed that I_{Di} is bounded); this is then consistent with the fact that the flux across the disc (i) remains constant in the limit of infinite disc conductivity.

In order to make calculations easier, the rest of the study is restricted to interactions between two identical disc-dynamos. The discussion is then reduced to four non-dimensional parameters. Current intensities are expressed in function of magnetic flux, reducing the formulation to 6 unknowns and 6 independent equations. They are formulated in dimensionless form.

3.4- The dimensionless formulation

From (5) and (6), I_{Ci} and I_{Dj} can be derived in function of Φ_{Ci} and Φ_{Dj} , and replaced in (4), (3) and (10). Then, defining the following dimensionless variables:

$$(17) \quad \tau = \frac{R_c}{L_c} \cdot t, \quad X_i = \frac{\Phi_{Di}}{\sqrt{G \cdot M}}, \quad Y_i = \frac{\Phi_{Ci}}{L_c \cdot \sqrt{\frac{G}{M}}}, \quad Z_i = \frac{M}{R_c} \cdot \Omega_i,$$

the equations describing the behaviour of the bipolar disc-dynamo are deduced from (4), (3) and (10), in the following form:

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{X}_i = r (Y_j - X_i) \\ \dot{Y}_i = X_i Z_i + m X_j - (1+m) Y_i \\ \dot{Z}_i = g \{1 - (1+m) X_i Y_i + m X_i X_j\} - f Z_i \end{cases},$$

where

$$(19) \quad m = \frac{M^2}{L_c L_D - M^2}, \quad g = \frac{G \cdot M \cdot L_c}{J \cdot R_c^2}, \quad r = \frac{R_D}{R_c} \cdot \frac{L_c^2}{L_c L_D - M^2}, \quad f = \frac{k \cdot L_c}{J \cdot R_c}.$$

As $M^2 < L_c L_D$, the magnetic interaction parameter m is always positive.

4- The analysis

4.1- The steady-state

The steady-state solutions of system (18) is given by:

$$(20) \quad \begin{array}{ll} X_1 = Y_2 & X_2 = Y_1 \\ X_1 Z_1 = Y_1 & X_2 Z_2 = Y_2 \\ g\{1 - X_1 Y_1\} = f Z_1 & g\{1 - X_2 Y_2\} = f Z_2 \end{array} .$$

For a non zero friction coefficient f , (20) implies:

$$(21) \quad \begin{cases} Z_1 = Z_2 \\ X_1 (Z_1^2 - 1) = X_2 (Z_2^2 - 1) = 0 \end{cases} .$$

Then two sets of steady-state solutions are derived:

$$(22a) \quad \begin{cases} X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = 0 \\ Z_1 = Z_2 = \frac{g}{f} \end{cases} \quad \text{and (22b)} \quad \begin{cases} X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{f}{g}} \\ Z_1 = Z_2 = 1 \end{cases} ,$$

the second one supposing that $f \leq g$.

The solution of (21) $Z_i = -1$ leads to $g(1 + X_i^2) + f = 0$ and, consequently, is not acceptable in a non trivial case.

The steady-state solutions are illustrated on figure 2. The steady-state solutions X_i 's and Y_i 's are designated by X_{st} and the Z_i 's by Z_{st} .

A linear stability analysis of each steady-state solution (22a) and (22b) is done in the next section, in order to find their range of stability.

4.2- The linear stability analysis

Stability of each steady-state solution set is investigated by adding to them small perturbations (x_i, y_i, z_i) . Neglecting the quadratic terms, they verify the following system:

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = r(y_j - x_i) \\ \dot{y}_i = Z_{st} x_i + X_{st} z_i + m x_j - (1+m)y_i \\ \dot{z}_i = g X_{st} (-x_i - (1+m)y_i + m x_j) - f z_i \end{cases}$$

Searching non trivial solutions of (23) proportional to $\exp(pt)$ where p is complex, leads to a polynomial function $\Delta(p)$ of sixth degree. The stability of the steady-state is then given by the sign of the real part of the roots of $\Delta(p)$.

For $X_{st} = 0$ and $Z_{st} = g/f$, the polynomial function is given by:

$$(24) \quad \Delta(p) = (f+p)^2 \left[p^2 + (m+r+1)p + r \left(1 + \frac{g}{f} \right) \right] \left[p^2 + (m+r+1)p + r \left(1 - \frac{g}{f} \right) \right]$$

The roots of Δ have always a negative real part, unless $r(1 - g/f) < 0$. Therefore the steady-state (22a) is stable if and only if $g/f < 1$.

For $X_{st} = \pm (1 - f/g)^{1/2}$ and $Z_{st} = 1$, the polynomial function is given by:

$$(25) \quad \Delta(p) = \left[p^3 + (m+r+f+1)p^2 + (g(m+1) + rf)p + 2r(g-f) \right] \left[p^3 + (m+r+f+1)p^2 + (g(m+1) + r(f+2))p + 2rf \right]$$

The second factor of (25) has only negative real part roots (unless $rf = 0$). Indeed, it would lead to instability if and only if

$$\frac{2rf}{r+f+m+1} > g(m+1) + r(f+2) \Leftrightarrow -\frac{2r(r+m+1)}{r+f+m+1} > g(m+1) + rf,$$

which is not possible in a non trivial case.

Therefore, the condition equivalent to linear instability of the solutions of (22b) is:

$$(26) \quad \frac{2r(g-f)}{r+f+m+1} > g(m+1) + rf$$

or equivalently:

$$(27a) \quad r > \frac{(m+1)(m+f+1)}{1-m} \quad \text{and} \quad (27b) \quad \frac{g}{f} > \frac{2r + r(r+f+m+1)}{2r - (m+1)(r+m+f+1)}$$

It is interesting to note that condition (27a) only concerns the parameters r , m and f . In figure 3, the region of the (r,m) plane corresponding to (27a) for linear instability is indicated. In figure 4, the stable steady-state solutions of initial system (18) are sketched in function of g/f .

It is worth noting that, unless to be on bifurcation points or on the frontier between stability and instability, the roots of $\Delta(p)$ do not have zero real part. Then, from Lyapunov theorems, stability of the non linear initial system (18) can be deduced from the results of the linear stability analysis.

5- Discussion

The previous linear stability analysis has been done for a non zero friction coefficient f and a finite value of r , corresponding to two coupled dynamo-discs with azimuthal currents and symmetric friction coefficients. The system is found conditionally stable, depending on the parameters of the problem. In particular, a bifurcation for $f=g$ leads to two possible steady-states. When the g -independent condition (27a) is verified, then, for a sufficiently large value of g verifying (27b), the system is found unstable. Chaotic behaviour may then be reached, with oscillations around the two unstable steady-

state values. A computation illustration is proposed in figure 5.

A corresponding linear stability analysis of one dynamo-disc with azimuthal currents and friction coefficient would lead to the same results on instability criteria. This is consistent with equation (12) which stresses the power exchange independance of parts A and B in figure 1 (see section 3.2).

Setting $f=0$ in the condition (27a) leads to the same result found by Moffatt in the case of one disc without friction but with azimuthal currents.

Now, if f is set equal to zero (no friction) in (20), then the steady-state is different from (22a and b), leading to:

$$(28) \quad Y_1 = X_2 = \frac{1}{X_1}, \quad Y_2 = X_1, \quad Z_1 = \frac{1}{X_1^2}, \quad Z_2 = X_1^2$$

with $X_1 \neq 0$ unless $g=0$. The linear stability of this steady-state is then given by the sign of the real part of the roots of the following polynomial function:

$$(29) \quad \Delta(p) = p.(p^5 + \alpha_4.p^4 + \alpha_3.p^3 + \alpha_2.p^2 + \alpha_1.p + \alpha_0), \quad \text{with}$$

$$(30) \quad \begin{cases} \alpha_4 = 2(r+m+1), & \alpha_3 = 2r+(r+m+1)^2+g(m+1)V^2, & \alpha_2 = r gV^2+(r+m+1)(2r+(m+1)gV^2) \\ \alpha_1 = g(r(r+2m+2)V^2+g(m+1)^2), & \alpha_0 = 2r g(g(m+1)+rV^2), & V^2 = X_1^2 + \frac{1}{X_1^2} \end{cases}$$

For $V^2 = 2$, the condition (27a) with $f=0$ is found again. Otherwise, other stable steady-states are possible. The corresponding neutral curve in the plane (m, r) for different values of V^2 and g are sketched in figures 6 and 7. However, as $\Delta(p)$ admits a root with zero real part, from Lyapunov theorem, no conclusion can be deduced from the linear stability analysis results for the initial non linear problem. An other instability analysis method is then necessary (like for the conventional formulation of Bullard and Rikitake). It then may appear that the system is in fact structurally unstable and therefore non physically realistic¹.

¹ It is worth noting that system (18) with 4 parameters ($f \neq 0$) leads to a mathematical expression (25) which has analytical solutions. In return, the simplified system (20), obtained by setting $f=0$ in (18), and then depending only on 3 parameters, does not have simple analytical solutions. It is then remarkable that a more complex model in terms of number of parameters (also physically more realistic) leads in fact to a better shaped mathematical expression, simpler to analyse.

6- Conclusion

The Rikitake system composed of two disc-dynamos, electromagnetically coupled, has been modeled allowing the existence of azimuthal currents in the discs and non zero friction coefficients. The linear stability of the steady solutions of the symmetric system (identical discs) has been analysed and has shown that both stable and unstable cases are expected, depending on 4 parameters derived from the dimensionless equations. In particular, unstable steady solutions are possible when these parameters verify two specific conditions (27a) and (27b). If (27a) is verified, then (27b) shows that there always exists a mechanical torque G applied to the discs, sufficiently large to lead to instabilities. The existence of these instabilities is probably mainly due to the existence of azimuthal currents. They have indeed the possibility to amplify the magnetic field induced by the electrical loop, overbalancing the damping induced by mechanical friction.

In the case where azimuthal currents are neglected ($1/r = 0$), then (27b) is not verified and this confirms that Rikitake formulation with symmetric friction coefficients is always stable, as emphasized by Hide (1995). In the case where friction coefficients are neglected ($f=0$), then the system is probably structurally unstable and therefore non physically realistic. Therefore, this analysis proves that it is not possible to neglect either the azimuthal currents or mechanical frictions without loss of generality. Indeed, such a false analysis would lead to either overstability or structural instability. Besides, taking into account these two important features of the Rikitake dynamo (azimuthal currents and mechanical frictions), chaotic behaviours of the system are found possible, depending on the parameters of the problem. Then, Rikitake dynamo still stays, to our knowledge, the simplest system presenting magnetic field reversals.

Acknowledgments

The authors are grateful to Professor R. Moreau, from Institut National Polytechnique de Grenoble, for having suggested this study.

References

- Bullard, E. C., "The Stability of a Homopolar Dynamo", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51**, 744-760 (1955).
- Cook, A.E. and Roberts, P.H., "The Rikitake Two-disc-dynamo System", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **68**, 547-569 (1970).
- Hide, R., "Structural instability of the Rikitake disk dynamo", *Geophys. Res. Lett.*, **22**, 1057-1059 (1995).
- Moffatt, H.K., "A Self-Consistent Treatment of Simple Dynamo Systems", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **14**, 147-166 (1979).
- Moreau, R., "Magnetohydrodynamics", *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London*, 54-61 (1990).
- Rikitake, T., "Oscillations of a system of disk dynamos", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54**, 89-105 (1958).

Figure captions

Fig. 1- Description of the modified bipolar dynamo-disc

Fig. 2- The two sets of the steady-state solutions $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = X_{st}$ and $Z_1 = Z_2 = Z_{st}$ corresponding to (22a) and (22b).

Fig.3- Results of the linear stability analysis of the steady-state $X_{st} = \pm(1 - f/g)^{1/2}$ and $Z_{st} = 1$. In (a) it is always stable. In (b), it is also stable unless (27b) is verified.

Fig.4- Supposing (27a) is verified, stable steady-state solution $(X_{st}; Z_{st})$ exists unless g/f is sufficiently large to verify (27b). (a) represents the limit of stability.

Fig. 5 - Computed solutions of the system (18), with $(m; g; r; f) = (0.5; 50; 8; 0.5)$, $(X_1; X_2; Y_1; Y_2; Z_1; Z_2)_{initial} = (-1.4; -1; -1; -1.4; 2.2; -1.5)$

Fig. 6 - Neutral curves, for $g=1,5$ and different values of V^2 .

Fig. 7 - Neutral curves, for $V^2=4$ and different values of g .

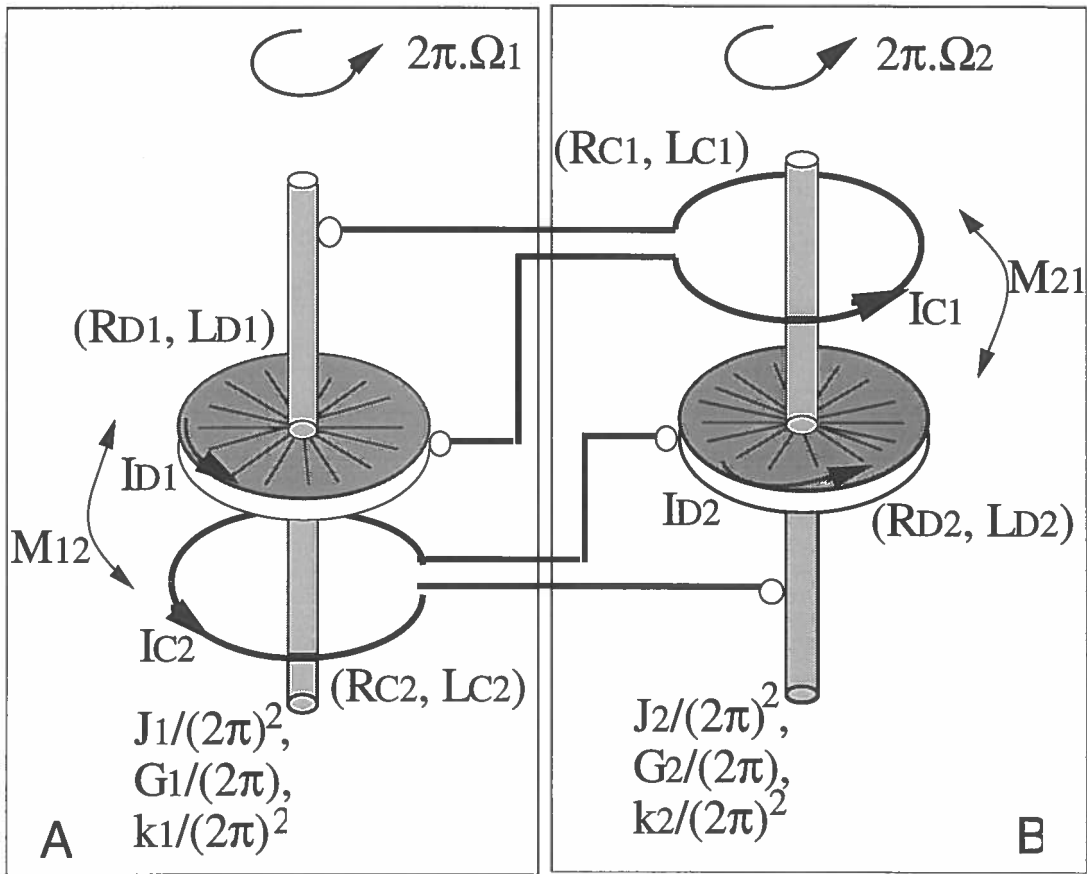


Fig.1

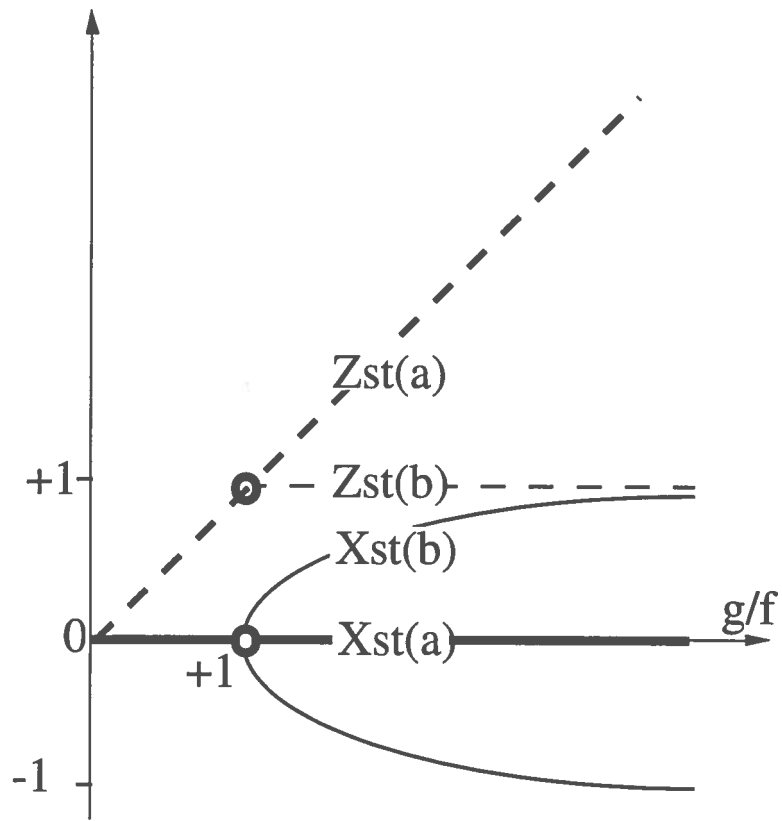


Figure 2

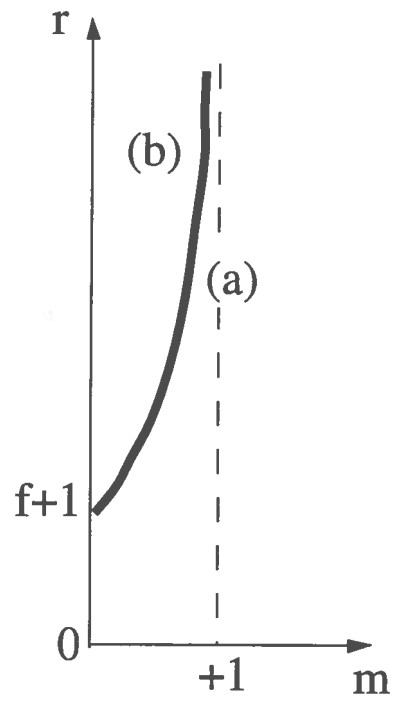


Figure 3

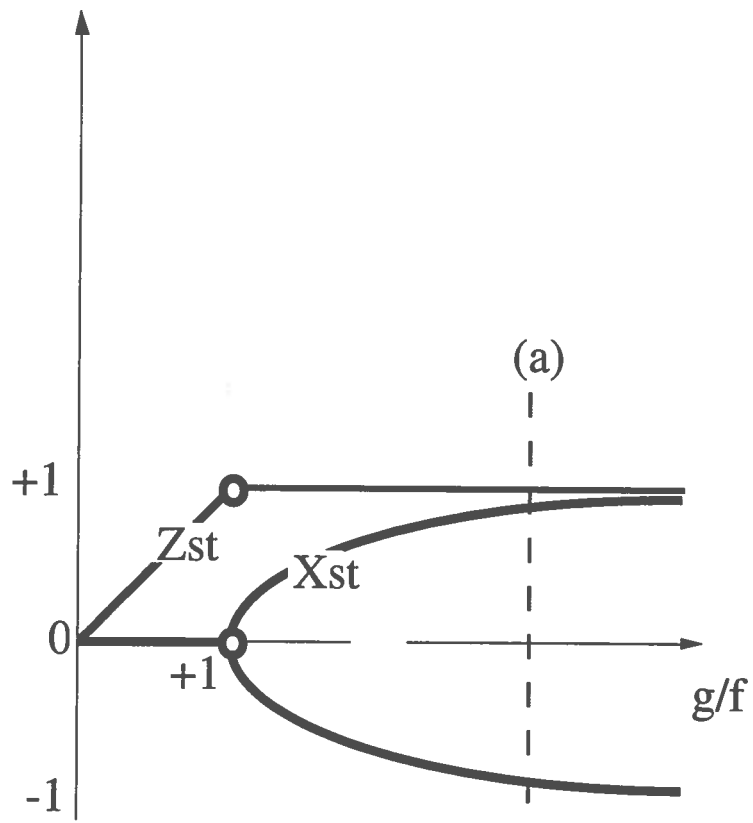


Figure 4

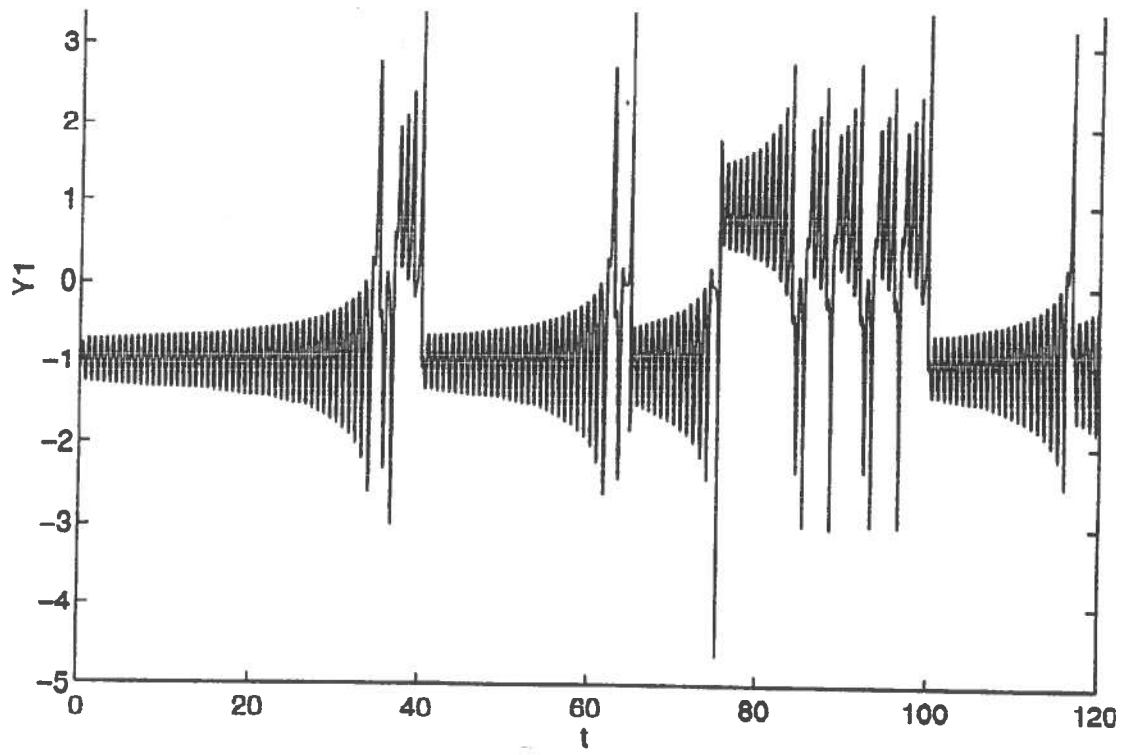


Fig. 5

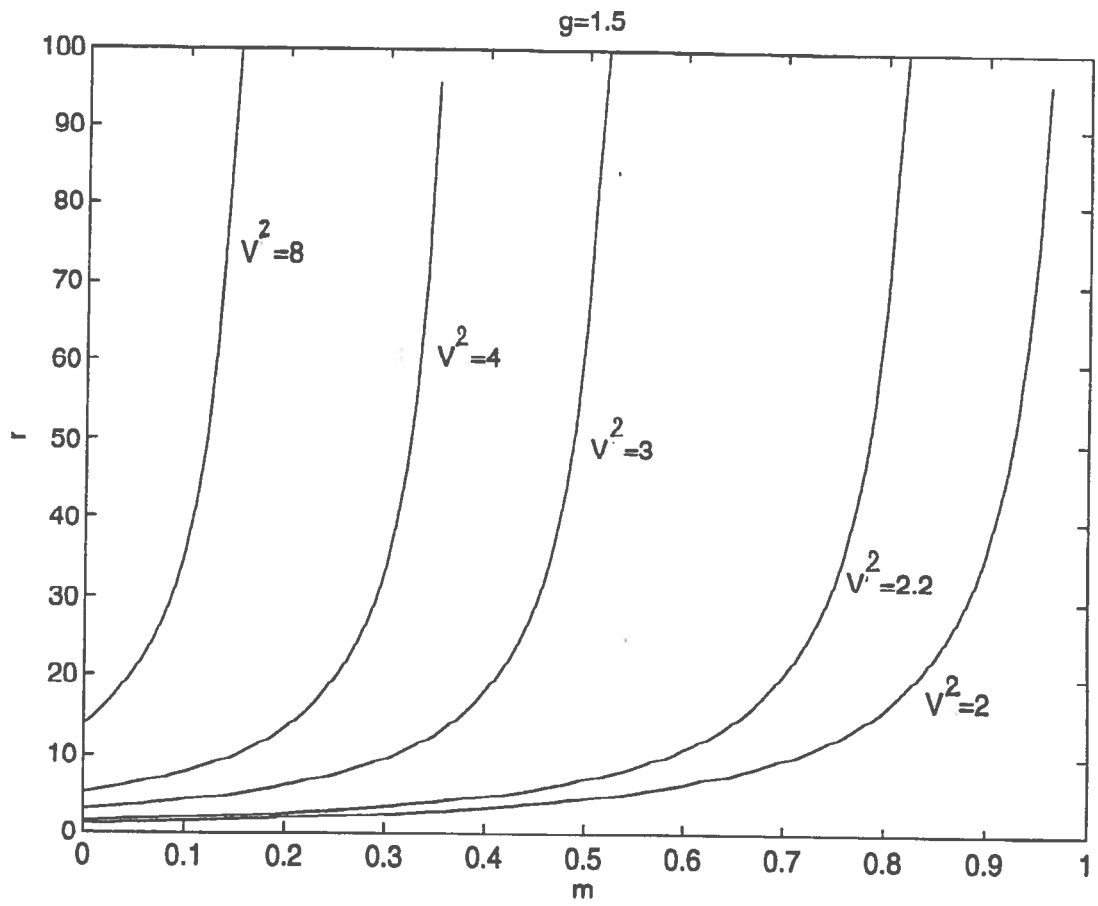


Fig. 6

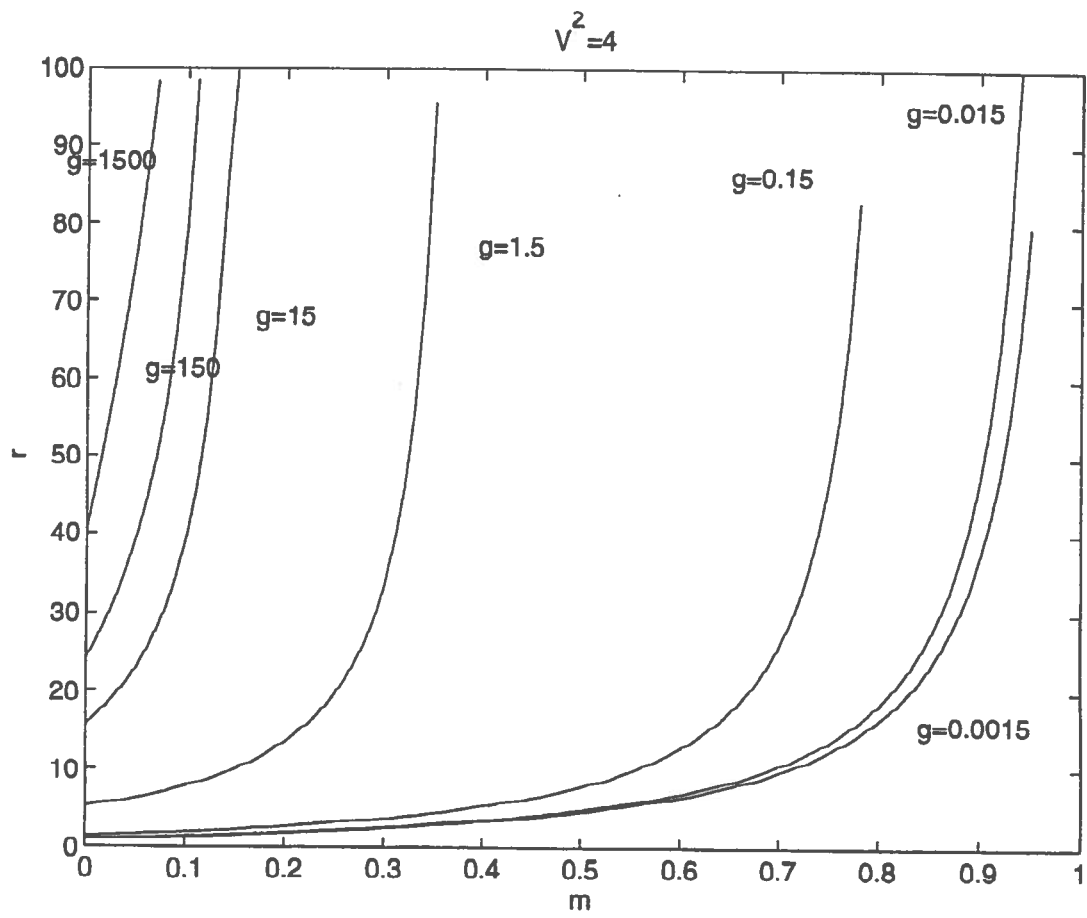


Fig. 7

Annexe 1.B- Décomposition poloïdale-toroïdale d'un champ de vecteur conservatif [Moffatt 1978]

Dans un repère de coordonnées sphériques ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$), tout champ de vecteur \mathbf{B} , conservatif ($\text{div}\mathbf{B} = 0$) peut être décomposé de la manière suivante:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P$$

avec

$$\mathbf{B}_T = \text{rot}(\mathbf{r} T(\mathbf{r})) = -\mathbf{r} \times (\nabla T)$$

$$\mathbf{B}_P = \text{rot}[\text{rot}(\mathbf{r} P(\mathbf{r}))] = -\text{rot}(\mathbf{r} \times (\nabla P))$$

où T et P sont des fonctions scalaires de la position $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$.

Dans le cas où \mathbf{B} est axisymétrique autour de Oz (donc indépendant de φ), \mathbf{B} peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_T \mathbf{e}_\varphi + \text{rot}(\mathbf{A}_T \mathbf{e}_\varphi)$$

alors \mathbf{B}_P est la composante méridionale du champ, et \mathbf{B}_T sa composante azimutale.

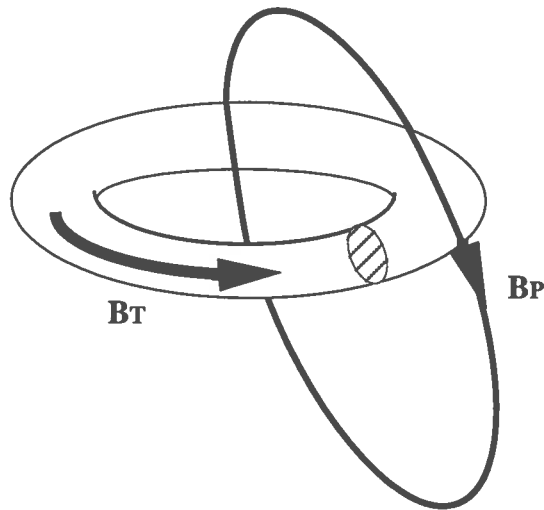


Fig. 1.36- Décomposition poloïdale- toroïdale d'un champ de vecteur conservatif axisymétrique

Annexe 1.C- Evaluation du nombre de Reynolds magnétiques pour Phenix et Superphenix

Pour chaque zone considérée, sommier, coeur, pompe primaire et secondaire, le nombre de Reynolds magnétique est calculé à l'aide de la formule suivante:

$$R_m = \sigma \mu L V$$

où σ est la conductivité électrique du milieu, μ sa perméabilité magnétique, L la longueur caractéristique de l'écoulement et V sa vitesse débitante.

Dans le cas du coeur et du sommier, on a accès au débit Q et à la vitesse débitante V , on en déduit donc la longueur caractéristique:

$$L = \sqrt{\frac{Q}{\pi V}}$$

Dans le cas des pompes, on a accès au rayon L de sortie de pompe et au débit Q , on déduit donc la vitesse débitante:

$$V = \frac{q}{\pi r_{\text{eff}}^2}$$

Les tableaux suivants reproduisent les caractéristiques nécessaires à l'évaluation du R_m dans chacune des zones considérées. Les calculs ont été réalisés grâce aux formules précédentes.

PHENIX	Sommier	Coeur	Pompe primaire	Pompe secondaire
Température de fonctionnement (°C)	<u>400</u>	<u>400 < < 560</u>	<u>400</u>	<u>350</u>
Conductivité électrique du sodium ($10^6 \Omega \cdot m$)	4,7	3,5 < < 4,7 moy. = 4,1	4,7	5,3
Débit unitaire q ($m \cdot s^{-1}$)	idem Coeur	3,57 < < 3,83 moy. = 3,7	1,1	0,85
Débit unitaire Q ($kg \cdot s^{-1}$)	idem Coeur	<u>3060</u>	<u>1020</u>	<u>737</u>
Masse volumique du sodium ρ ($kg \cdot m^3$)	857	800 < < 857	857	868
Vitesse axiale V ($m \cdot s^{-1}$)	idem pompe primaire	<u>5</u>	5,5	4,25
Section efficace S_{eff} (m^2)	0,67	0,74	0,2	0,2
Rayon efficace r_{eff} (m)	0,46	0,5	<u>0,25</u>	<u>0,25</u>
Nombre de Reynolds magnétique R_m	15	13	8,1	7

Tab.1.4- Evaluation du nombre de Reynolds magnétique dans différentes zones du réacteur Phenix.

SUPERPHENIX	Sommier	Coeur	Pompe primaire	Pompe secondaire
Température de fonctionnement (°C)	<u>395</u>	<u>395</u> < <	<u>395</u>	<u>345</u>
Conductivité électrique du sodium ($10^8 \Omega^{-1} \cdot m$)	4,7	3,5 < < 4,7 moy. = 4,1	4,7	5,3
Débit unitaire q ($m \cdot s^{-1}$)	idem Coeur	19,14 < < 20,5 moy. = 19,8	4,9	3,8
Débit unitaire Q ($kg \cdot s^{-1}$)	idem Coeur	<u>16400</u>	<u>4240</u>	<u>3300</u>
Masse volumique du sodium ρ ($kg \cdot m^{-3}$)	857	800 < < 857	857	870
Vitesse axiale V ($m \cdot s^{-1}$)	idem pompe primaire	<u>5</u>	3,9	4,75
Section efficace S_{eff} (m^2)	5	4	1,25	0,8
Rayon efficace r_{eff} (m)	1,27	1,13	<u>0,63</u>	<u>0,5</u>
Nombre de Reynolds magnétique R_m	30	30	14,5	15,8

Tab.1.5- Evaluation du nombre de Reynolds magnétique dans différentes zones du réacteur Superphenix.

Deuxième partie

**Analyse de stabilité temporelle de l'induction
magnétique dans le coeur du RNR Phenix**

I- Hypothèses de modélisation

Dans ce chapitre sont présentées les hypothèses concernant:

- d'une part l'écoulement analytique choisi pour représenter celui parcourant le coeur d'un RNR
- d'autre part les propriétés électromagnétiques du domaine.

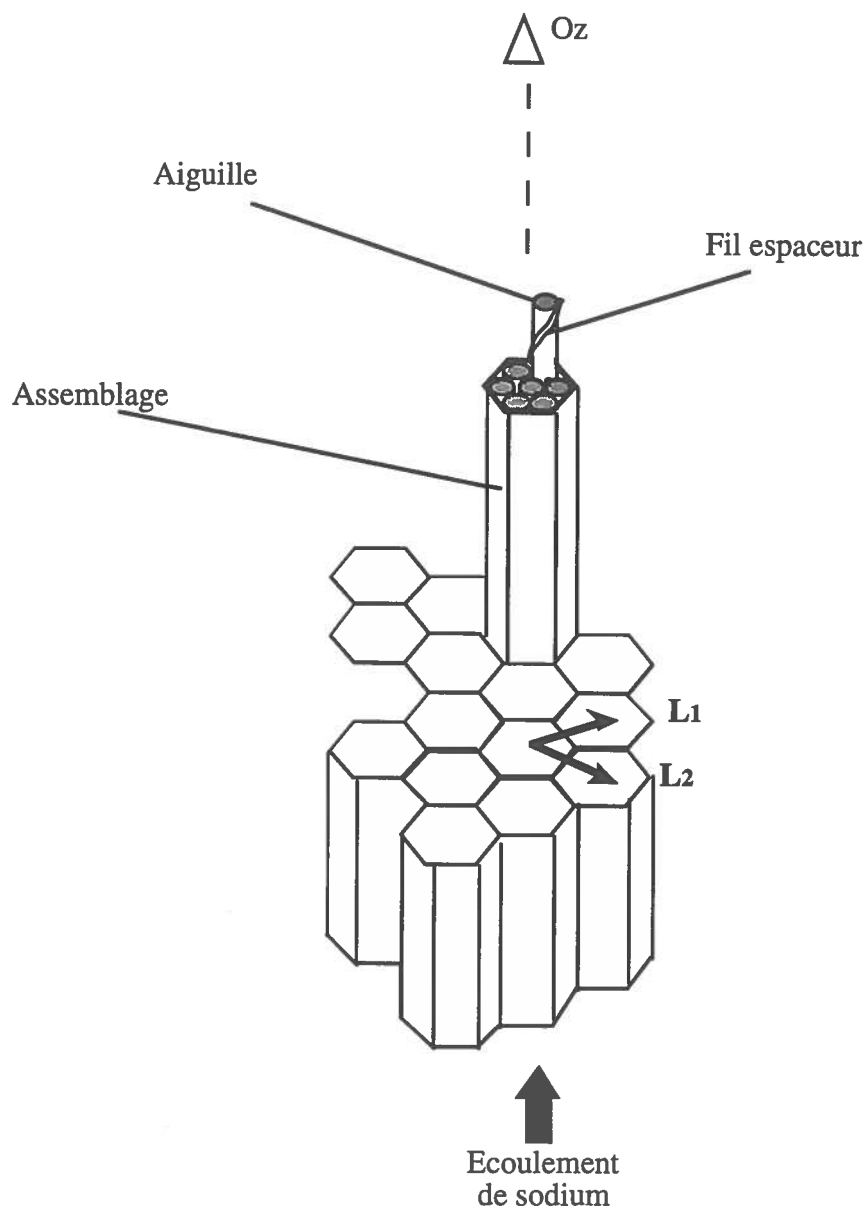


Fig.2.1- Disposition des assemblages dans le coeur

I-1. L'écoulement

I-1a. Ecoulement autour d'une aiguille

Chacune des 217 aiguilles composant chaque assemblage combustible est entourée d'un fil hélicoïdal. L'écoulement circulant autour d'une aiguille est donc, en première approximation hélicoïdal, de pas égal à celui du fil. Soit d le pas du fil hélicoïdal et $\phi_{\text{aig.}}$ le diamètre de l'aiguille (figure 2.2), alors le paramètre de vissage de l'écoulement est donné par:

$$\chi = \frac{d}{\pi \phi_{\text{aig.}}} = \frac{\bar{V}_Z}{V_\theta}$$

où \bar{V}_Z est la vitesse axiale moyenne de l'écoulement et V_θ sa vitesse azimutale.

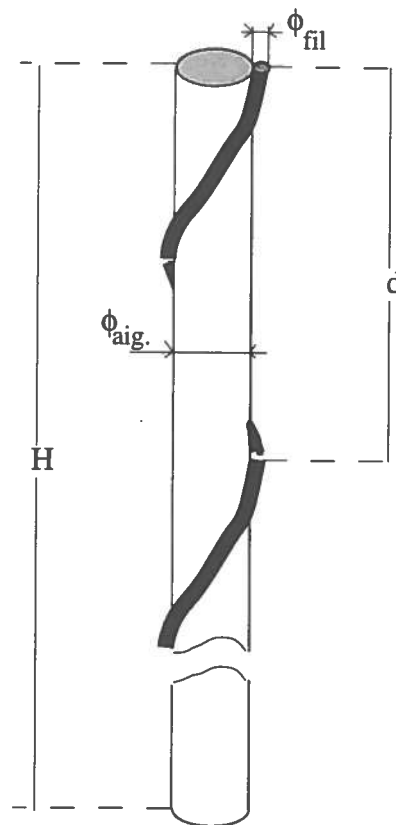


Fig. 2.2- Une aiguille contenant les éléments combustibles, entourée du fil espaceur permettant l'écoulement de sodium à sa périphérie.

I-1b. Écoulement dans un assemblage

L'écoulement dans un assemblage à 217 aiguilles est très peu connu. La seule donnée précise est la vitesse moyenne débitante [Lagrange et al 1969]:

$$\bar{V}_z = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Cependant, une étude expérimentale et numérique a été réalisée dans un assemblage contenant 19 aiguilles, espacées entre elles par des fils hélicoïdaux, l'ensemble étant parcouru par de l'eau [Lafay et al, 1975]. Les résultats montrent en particulier (figure 2.3):

- L'existence d'une recirculation hélicoïdale dans le canal périphérique de l'assemblage, dont le pas est à peu près égal à celui du fil espaceur
- L'existence d'une distribution de vitesse à l'intérieur de l'assemblage, avec une composante transversale moyenne de moins grande intensité, dont la direction dépend de z de façon sinusoïdale.

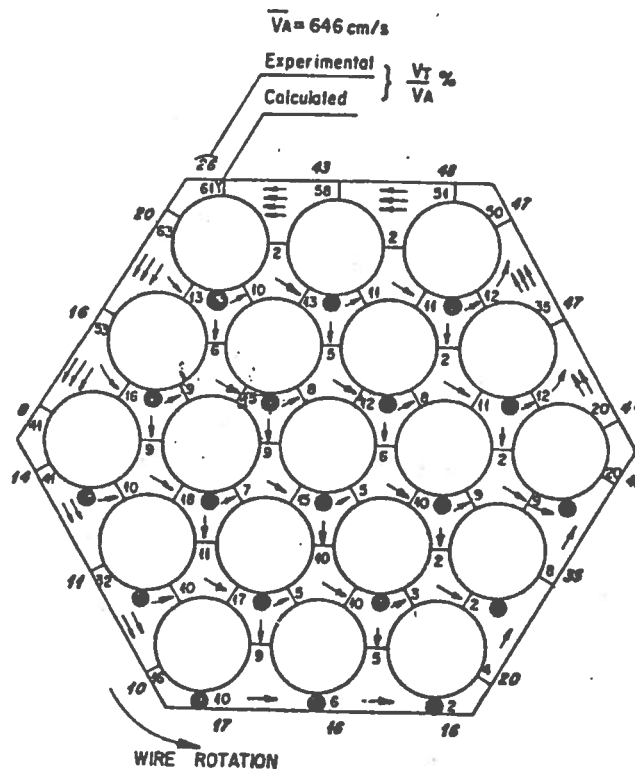


Fig.2.3- Organisation de l'écoulement transverse V_T par rapport à l'écoulement axial V_A , pour un assemblage comportant 19 aiguilles.

Etant donné le nombre d'assemblages présents dans le coeur d'un réacteur (plus d'une centaine) et le nombre d'aiguilles présentes dans un assemblage (217 dans un assemblage Phenix), l'écoulement à l'échelle du coeur sera modélisé dans notre étude par un champ de vitesse périodique selon deux directions horizontales, chaque cellule de périodicité représentant un assemblage, l'écoulement dans chaque assemblage reproduisant l'aspect hélicitaire observé par l'expérience évoquée ci-dessus. Cela permet d'étudier l'effet d'ensemble des assemblages. Il sera toujours possible, au cours d'un travail ultérieur, d'étudier l'influence des détails de l'écoulement au sein de chacun d'entre eux. Précisons enfin que l'aspect turbulent de l'écoulement (Re de l'ordre¹ de 10^4) n'est pas pris en compte dans la modélisation.

L'expression de l'écoulement est faite à l'aide de fonctions trigonométriques, de façon à pouvoir être introduite dans l'équation de l'induction dans le but de traiter ensuite cette dernière par une analyse d'instabilité en décomposant le champ magnétique en série de Fourier. Il en résulte des assemblages en forme de losange plutôt que des hexagones (figure 2.4). La perte d'information provoquée par cet aménagement est négligeable par rapport à celle consistant à ne pas modéliser les 217 aiguilles à l'intérieur de chaque assemblage.

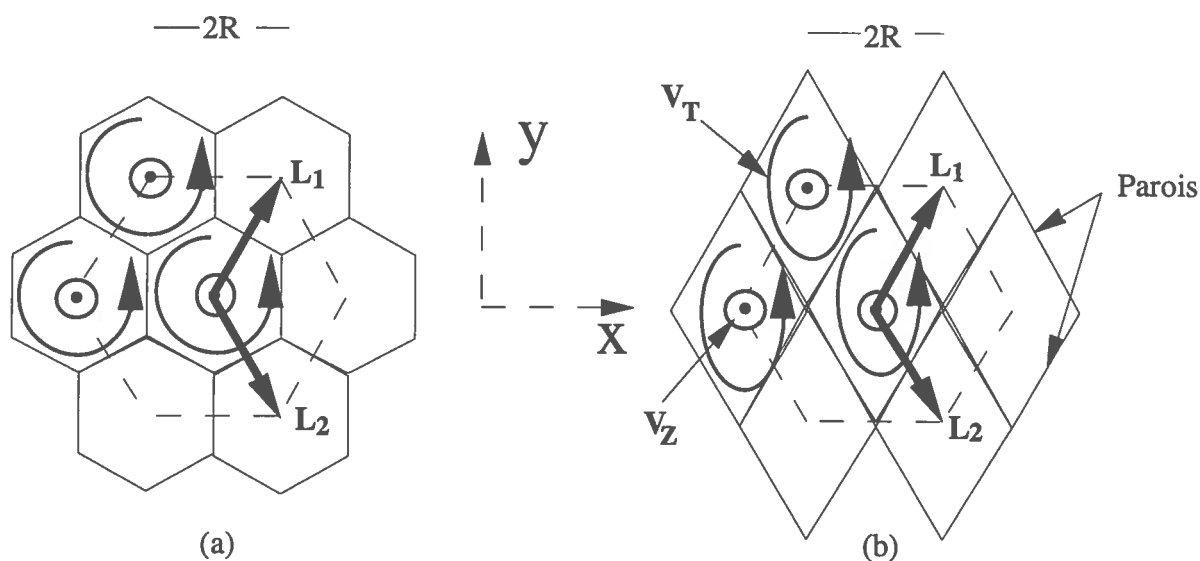


Fig.2.4- Comparaison entre la géométrie réelle (a) et la représentation choisie (b).

¹ $Re=VL/v = 6.6 \cdot 10^3$ avec $V=5m.s^{-1}$, $L=10^{-3}m$ entre les aiguilles et $v=7.6 \cdot 10^{-7}m^2.s^{-1}$

Toutefois, ce champ de vitesse répond aux critères suivants:

- L'écoulement décrit est à caractère hélicitaire, comme celui induit dans l'assemblage par les fils espaceurs.

- L'écoulement est à divergence nulle: $\text{div}\mathbf{V} = 0$.

- La vitesse moyenne axiale est prise égale à la vitesse moyenne réelle. Cette hypothèse implique une exagération du débit au prorata du rapport des sections $S_{\text{Ass}} / S_{\text{Na}}$. Elle permet cependant de respecter le facteur d'hélicité mesuré en périphérie.

- Le paramètre de vissage correspondant au rapport de la vitesse azimutale la plus forte sur la vitesse moyenne (analogie avec l'écoulement hélicitaire en bloc) est pris égal à celui d'une aiguille:

$$(2.1) \quad \frac{\bar{V}_z}{(V_\theta)_{\text{max}}} = \chi$$

- La disposition périodique des assemblages les uns par rapport aux autres, selon les deux directions $\mathbf{L1}(L, \sqrt{3}.L, 0)$ et $\mathbf{L2}(L, -\sqrt{3}.L, 0)$, est respectée.

- L'écoulement est nul sur la paroi de l'assemblage.

L'expression du champ de vitesse correspondant aux critères précédents est définis en coordonnées cartésiennes par:

$$(2.2) \quad \begin{cases} V_x = -C \frac{\bar{V}_z}{\chi\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y-\sqrt{3}x}{2R}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y+\sqrt{3}x}{2R}\right) \\ V_y = +C \frac{\bar{V}_z}{\chi} \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y-\sqrt{3}x}{2R}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y+\sqrt{3}x}{2R}\right) \\ V_z = 4 \bar{V}_z \cos^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y-\sqrt{3}x}{2R}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y+\sqrt{3}x}{2R}\right) \end{cases}$$

où L est la distance séparant les centres de deux assemblages voisins. La constante C est calculé de façon à ce que (2.1) soit vérifié.

Les données correspondant au coeur de Phenix figurent dans le tableau 2.1

d (mm)	$\phi_{\text{aig.}}$ (mm)	ϕ_{fil} (mm)	R (mm)	χ	C	V_z (m.s ⁻¹)	$(V_\theta)_{\text{max}}$ (m.s ⁻¹)
150	6.55	1.15	60	7.3	1.54	5	0.68

Tab. 2.1- Données correspondant au coeur de Phenix

I-2. Propriétés électromagnétiques

Les paramètres électromagnétiques dans le coeur du réacteur sont approchés par une valeur homogène dans tout le coeur, calculée en prenant la moyenne dans une section horizontale des paramètres des différents matériaux le constituant (enveloppes en inox, matière combustible, sodium):

$$(\sigma, \mu)_{\text{ass.}} = \frac{S_{\text{Na}}}{S_{\text{ass.}}} (\sigma, \mu)_{\text{Na}} + \frac{S_{\text{env.}}}{S_{\text{ass.}}} (\sigma, \mu)_{\text{env.}} + \frac{S_{\text{comb.}}}{S_{\text{ass.}}} (\sigma, \mu)_{\text{comb.}}$$

Les chemins suivis par les courants électriques sont donc supposés équi-probables dans le coeur. En réalité, les courants ont tendance à circuler d'avantage dans le sodium compte-tenu de sa grande conductivité électrique par rapport aux autres éléments.

La valeur de conductivité retenue est celle du sodium. Cette hypothèse induit probablement une légère exagération du nombre de Reynolds magnétique équivalent.

I.3- Les paramètres de contrôle

La topologie du champ de vitesse étant fixée par les fils espaceurs, la seule propriété mécanique pouvant varier est

- L'intensité du débit de sodium dans les assemblages, induit par les pompes.

Deux autres facteurs vont modifier les propriétés électromagnétiques du coeur:

- La température qui agit directement sur la conductivité électrique du sodium (figure 2.5).
- Le nombre d'assemblages dont l'enveloppe est constituée de matériaux ferromagnétique, affectant la perméabilité magnétique moyennée sur le coeur (annexe).

Dans la suite, on étudiera donc l'influence du débit, de la température et du nombre d'assemblages ferromagnétiques.

T(°C)	100	200	300	400	500
$\sigma(10^6\Omega^{-1}\text{m}^{-1})$	10.6	7.8	6	4.7	4

Tab. 2.2- Conductivité électrique du sodium en fonction de la température [Freedman & Robertson 1961].

II- Résolution

II-1. Analyse préliminaire

Un changement de repère suivi d'une adimensionnalisation sont effectués dans un souci de clarté et de généralisation.

II-1a. Changement de repère

Soit $\mathcal{R}_1 (O, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ le repère initial, orthonormé, dans lequel le champ de vitesse (2.1) a été donné. Appelons $\mathcal{R}_2 (O, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$ le nouveau repère, déduit du précédent par les relations suivantes (figure 2.5):

$$\begin{cases} \mathbf{i}_2 = \frac{1}{2\pi} (\mathbf{i}_1 + \sqrt{3}\mathbf{j}_1) \\ \mathbf{j}_2 = \frac{1}{2\pi} (-\mathbf{i}_1 + \sqrt{3}\mathbf{j}_1) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 \end{cases}$$

Les coordonnées d'un point M dans \mathcal{R}_2 sont donc exprimées en fonction de celles dans \mathcal{R}_1 :

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} (y_1 + \sqrt{3}x_1) \\ y_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} (y_1 - \sqrt{3}x_1) \\ z_2 = z_1 \end{cases}$$

De même, le champ de vitesse dans \mathcal{R}_2 s'écrit en fonction des composantes exprimées dans \mathcal{R}_1 :

$$\begin{cases} V_{X2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} (V_{Y1} + \sqrt{3}V_{X1}) \\ V_{Y2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} (V_{Y1} - \sqrt{3}V_{X1}) \\ V_{Z2} = V_{Z1} \end{cases}$$

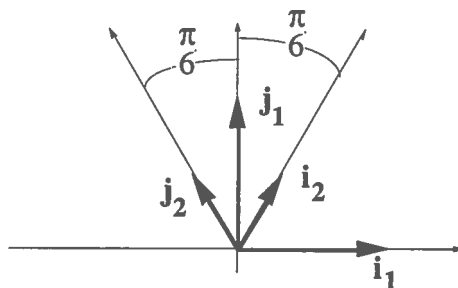


Fig. 2.5- Repères \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2

Par conséquent, l'expression du champ de vitesse dans \mathcal{R}_2 en fonction des coordonnées dans \mathcal{R}_2 s'écrit:

$$(2.2) \quad \begin{cases} V_{X2} = -R\omega \cdot \sin\left(\frac{Y2}{R}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{X2}{2R}\right) \\ V_{Y2} = R\omega \cdot \sin\left(\frac{X2}{R}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{Y2}{2R}\right) \\ V_{Z2} = \chi_2 R\omega \cdot \cos^2\left(\frac{X2}{2R}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{Y2}{2R}\right) \end{cases}$$

$$\text{avec } R\omega = \frac{\pi C \bar{V}_{Z1}}{\chi_1 \sqrt{3}} \quad \text{et } \chi_2 R\omega = 4 \bar{V}_{Z1}$$

ω étant homogène à une vitesse angulaire. L'écoulement dans \mathcal{R}_2 est périodique dans les deux directions $\mathbf{l}_1(L, 0, 0)$ et $\mathbf{l}_2(0, L, 0)$. Chaque cellule est carrée, de côté $2\pi R$. Le champ de vitesse correspondant est représenté aux figures 2.6 et 2.7.

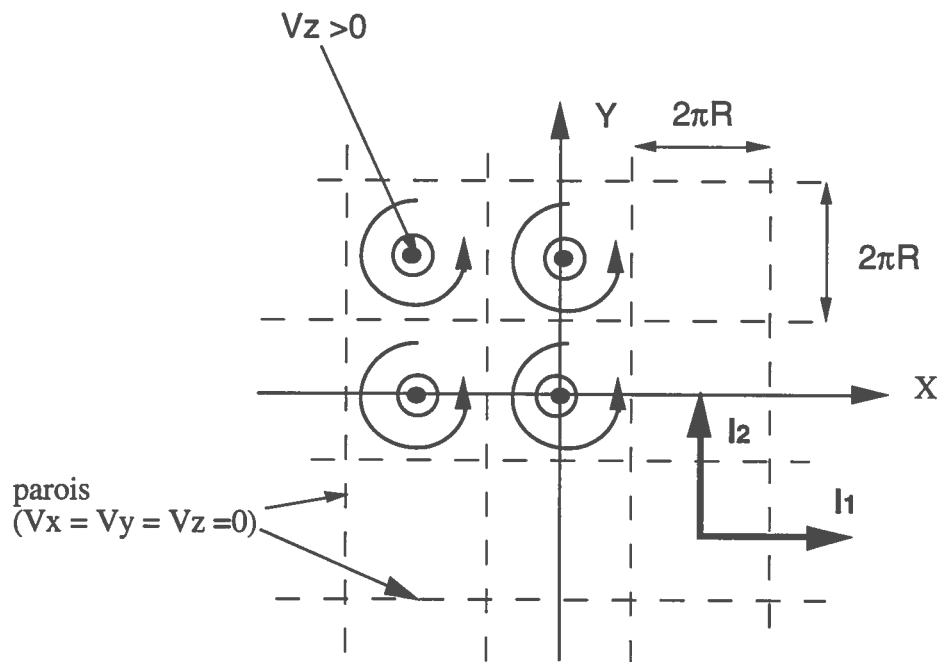


Fig.2.6- Réseau orthogonal obtenu après changement de repère.

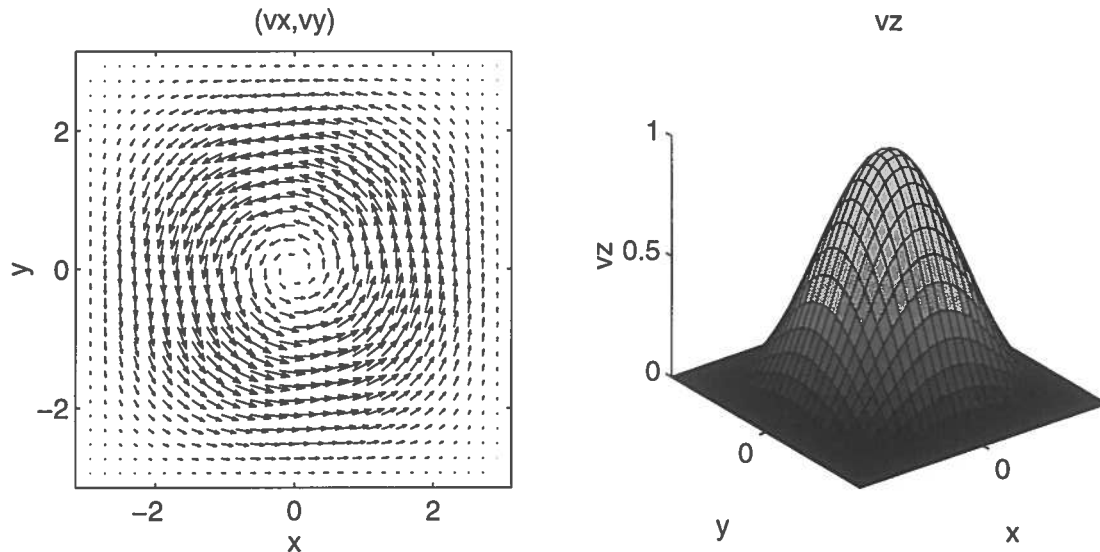


Fig.2.7- Illustration du champ de vitesse (2.2)- (a) Champ de vitesse transversal- (b) Isovaleurs du champ de vitesse axial.

II-1b. Le problème adimensionnel

En introduisant le changement de coordonnées et variables suivant:

$$(x, y, z) = \frac{1}{R} (x_2, y_2, z_2), \quad \tau = \omega \sqrt{1 + \chi_2^2} \cdot t, \quad v(x, y, \tau) = \frac{V_2(x_2, y_2, t)}{R\omega \sqrt{1 + \chi_2^2}},$$

l'induction magnétique $\mathbf{b}(x, y, z, t)$ vérifie l'équation suivante:

$$(2.3) \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \tau} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{b}) + R_m^{-1} \nabla^2 \mathbf{b}$$

où:

$$(2.4) \quad R_m = R^2 \omega \sigma \mu \sqrt{1 + \chi_2^2}.$$

On voit dans l'expression du R_m que ce dernier est directement influencé par les 3 paramètres de contrôle: débit (ω), température (σ) et nombre d'assemblages ferromagnétiques (μ).

II-2. La méthode de résolution

II-2a. Approximation au 1er ordre en k

La résolution de l'équation de l'induction, pour le champ de vitesse défini dans la section précédente, est basée sur des travaux antérieurs, démontrant la validité mathématique de la théorie utilisée. En particulier, G.O. Roberts a démontré que:

“Pour un écoulement périodique dans l'espace, il y a effet dynamo si et seulement si pour un vecteur \mathbf{k} de \mathcal{R}^3 , il existe une induction magnétique de la forme

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \exp(p \tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

avec $\text{Re}(p) > 0$ et $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ de même périodicité que l'écoulement.”[G.O. Roberts, 1970].

Du fait de la périodicité du champ de vitesse dans le plan horizontal (x,y) , \mathbf{k} est choisi égal au nombre d'onde axial le long de la troisième direction d'espace, direction privilégiée de l'écoulement:

$$\mathbf{k} = k \vec{z}$$

déterminant ainsi la dépendance en z de \mathbf{b} .

Par conséquent, l'équation (2.3) est réduite à l'expression suivante:

$$(2.5) \quad p\mathbf{h} = -ikv_z\mathbf{h} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{h} + (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{v} + R_m^{-1}(-k^2 + \nabla_{xy}^2)\mathbf{h} \quad \text{où } \nabla_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

Les termes du membre de droite sont clairement linéaires par rapport à \mathbf{h} . Par conséquent, n'importe quel champ magnétique non nul est amplifié à partir du moment où le système précédent a une valeur propre dont la partie réelle est positive.

Du fait de l'indépendance du champ de vitesse par rapport à z , les deux premières composantes de l'équation (2.5) ne contiennent pas h_z , et peuvent, par conséquent, être résolues de façon indépendante de la troisième. A partir des valeurs trouvées pour h_x et h_y , on peut ensuite déterminer h_z à partir de l'équation restante, ou de manière plus simple en écrivant l'équation de conservation de \mathbf{b} :

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + ikh_z = 0$$

C'est ce qui est fait dans le reste de l'étude, cette dernière ne concernant donc que les deux premières composantes de (2.5).

II-2b. Décomposition spectrale

Du fait que \mathbf{h} a la même périodicité que l'écoulement, il est naturel de le décomposer en série de Fourier dans les 2 directions de périodicité du champ de vitesse:

$$h_x = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{mn} e^{imx + iny} \quad \text{and} \quad h_y = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{mn} e^{imx + iny}$$

En substituant cette dernière expression dans (2.5), les coefficients f_{mn} et g_{mn} doivent vérifier:

$$\begin{cases} \sqrt{1 + \chi^2} p f_{m,n} = \left\{ -R_m^{-1} \sqrt{1 + \chi^2} (k^2 + m^2 + n^2) - \frac{ik}{4} \chi \right\} f_{m,n} \\ + \left\{ -\frac{ik}{16} \chi + \frac{m-n-1}{8} \right\} f_{m-1, n-1} + \left\{ -\frac{ik}{8} \chi - \frac{n}{4} \right\} f_{m-1, n} + \left\{ -\frac{ik}{16} \chi + \frac{-m-n+1}{8} \right\} f_{m-1, n+1} \\ + \left\{ -\frac{ik}{8} \chi + \frac{m}{4} \right\} f_{m, n-1} + \left\{ -\frac{ik}{8} \chi - \frac{m}{4} \right\} f_{m, n+1} + \left\{ -\frac{ik}{16} \chi + \frac{m+n+1}{8} \right\} f_{m+1, n-1} \\ + \left\{ -\frac{ik}{8} \chi + \frac{n}{4} \right\} f_{m+1, n} + \left\{ -\frac{ik}{16} \chi + \frac{-m+n-1}{8} \right\} f_{m+1, n+1} \\ + \left\{ \frac{1}{8} g_{m-1, n-1} + \frac{1}{8} g_{m-1, n+1} + \frac{1}{4} g_{m, n-1} + \frac{1}{4} g_{m, n+1} + \frac{1}{8} g_{m+1, n-1} + \frac{1}{8} g_{m+1, n+1} \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1 + \chi^2} p g_{m,n} = \left\{ -R_m^{-1} \sqrt{1 + \chi^2} (k^2 + m^2 + n^2) - \frac{ik}{4} \chi \right\} g_{m,n} \\ + \left\{ -\frac{ik}{16} \chi + \frac{m-n+1}{8} \right\} g_{m-1, n-1} + \left\{ -\frac{ik}{8} \chi - \frac{n}{4} \right\} g_{m-1, n} + \left\{ -\frac{ik}{16} \chi + \frac{-m-n-1}{8} \right\} g_{m-1, n+1} \\ + \left\{ -\frac{ik}{8} \chi + \frac{m}{4} \right\} g_{m, n-1} + \left\{ -\frac{ik}{8} \chi - \frac{m}{4} \right\} g_{m, n+1} + \left\{ -\frac{ik}{16} \chi + \frac{m+n-1}{8} \right\} g_{m+1, n-1} \\ + \left\{ -\frac{ik}{8} \chi + \frac{n}{4} \right\} g_{m+1, n} + \left\{ -\frac{ik}{16} \chi + \frac{-m+n+1}{8} \right\} g_{m+1, n+1} \\ + \left\{ \frac{1}{8} f_{m-1, n-1} + \frac{1}{4} f_{m-1, n} + \frac{1}{8} f_{m-1, n+1} + \frac{1}{8} f_{m+1, n-1} + \frac{1}{4} f_{m+1, n} + \frac{1}{8} f_{m+1, n+1} \right\} \end{cases}$$

La décomposition de \mathbf{h} est ensuite tronquée à un ordre N de façon à ce que le critère de précision défini dans le paragraphe suivant (§II-2c) soit vérifié. Les coefficients f_{mn} et g_{mn} sont donc les composantes des vecteurs propres d'une matrice de dimension $[2(2N+1)^2]^2$, dont l'ensemble des valeurs propres représente l'ensemble des valeurs possibles de p . A chaque valeur propre p correspond un vecteur propre (f_{mn}, g_{mn}) .

Il y a effet dynamo lorsqu'il existe p tel que $\text{Re}(p) > 0$. Le vecteur propre associé permet de calculer la représentation géométrique du champ magnétique excité. La partie imaginaire de p donne la pulsation du champ magnétique. Les calculs des valeurs propres et vecteurs propres du système à résoudre ont été réalisés en utilisant les sous-routines de LAPACK.

II-2c. Troncature et convergence

La troncature (N) en m et n (choisie identique par simplicité) est faite de sorte que l'addition des harmoniques en N soient négligeables par rapport à la solution issue de la troncature précédente ($N-1$). En effet, le système d'équations (2.5) étant elliptique, linéaire et homogène, avec des coefficients infiniment dérivables et des conditions aux limites périodiques, la solution numérique doit converger lorsque $N \rightarrow +\infty$ [Roberts, 1972]. Pratiquement, appelons s_N la valeur maximum des harmoniques de rang N par rapport aux modes fondamentaux:

$$s_N = \frac{\max\{|f_{-Nn}|, |f_{Nn}|, |f_{m-N}|, |f_{mN}|, |g_{-Nn}|, |g_{Nn}|, |g_{m-N}|, |g_{mN}|, \forall (m,n) \in \{-N, N\}^2\}}{\max\{|f_{0d}|, |g_{0d}|}$$

alors l'erreur maximum commise sur la valeur propre recherchée est de l'ordre $O(s_N^2)$. Par conséquent, en arrêtant le calcul quand s_N est inférieur à $3 \cdot 10^{-2}$, la précision sur la valeur propre recherchée est meilleure que 10^{-3} . En pratique, au pire ce critère a été appliqué, dans la plupart des cas, il a été amélioré de 2 ordres de grandeurs.

III- Résultats et interprétation

Une partie des résultats suivants ont donné lieu à publication

- [Plunian et al 1995]: Il y est dressé un bilan prédictif pour une configuration d'écoulement correspondant au coeur de Phenix, en fonction des 3 paramètres évoqués précédemment: température, débit et perméabilité magnétique homogène et moyenne du coeur. Les résultats sont donnés en valeur dimensionnelle.
- Le reste des résultats (caractéristiques anti-dynamo), de nature plus fondamentale, inspecte le comportement des solutions pour des valeurs des paramètres différentes que celle d'un réacteur à neutron rapide. Les équations sont adimensionnalisées de la même manière que dans le chapitre II. Ces résultats sont l'objet d'une publication en préparation.

Grâce au changement de repère précisé dans le chapitre II, la correspondance avec l'article de 1995 peut être aisément vérifiée. Toutefois, les variables n'étant pas toujours définies de la même façon, les correspondances sont à faire avec prudence. Ainsi, un facteur 2.6 apparaît entre les définitions du R_m .

III-1. Taux d'accroissement

Le taux d'accroissement du champ magnétique est calculé en fonction:

- du débit q dans chaque assemblage par rapport au débit nominal
- de la température de fonctionnement (entre 100°C et 500°C)
- du nombre d'assemblages dont l'enveloppe est ferromagnétique. En fait, les résultats sont présentés en fonction de la perméabilité relative équivalente répartie de façon homogène dans le coeur. Il ne faut cependant pas corrélérer de façon trop hâtive la perméabilité moyenne du coeur et le nombre d'assemblages ferromagnétiques.

III-1.a Influence du débit

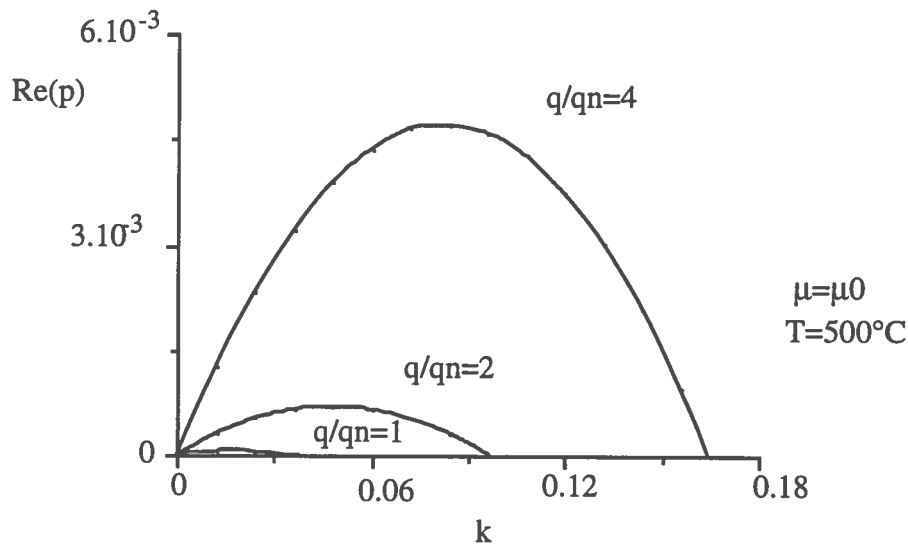


Fig. 2.8- Taux d'accroissement en fonction du nombre d'onde, pour différents débits.

On constate que le taux d'accroissement du champ magnétique est croissant avec le débit q/q_n (augmentation du R_m).

La longueur d'onde dimensionnelle du champ magnétique excité est donnée par:

$$h = \frac{2\pi R}{k}$$

A température nominale, pour une perméabilité moyenne du coeur égale à celle du sodium, et à débit nominal ($q/q_n=1$), la hauteur nécessaire à l'amplification est donc de l'ordre de 10 mètres (figure 2.8). Or la partie hélicoïdale de l'écoulement dans un assemblage (aiguille combustible + aiguille CAS) étant de l'ordre de 2 mètres, tout effet dynamo est impossible pour un fonctionnement nominal. En fait, pour atteindre le seuil d'excitation, il faudrait un débit de l'ordre de 6 fois le débit nominal, soit une vitesse débitante de $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$!!!

III-1.b Influence de la perméabilité

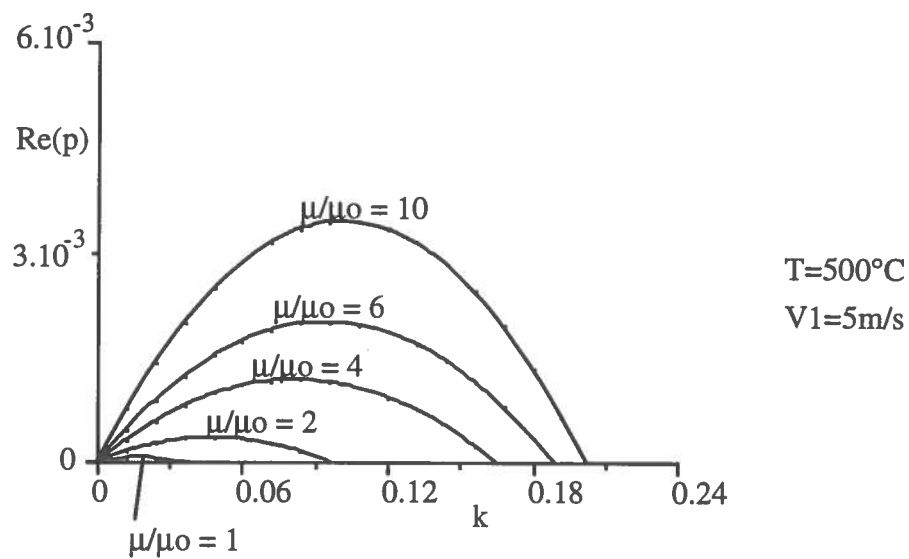


Fig. 2.9- Taux d'accroissement en fonction du nombre d'onde, pour différentes perméabilités.

On constate que le taux d'accroissement du champ magnétique est croissant avec la perméabilité μ du milieu (augmentation du R_m).

On retrouve une valeur de hauteur minimum nécessaire à l'amplification de l'ordre de 10 mètres ($k=0.038$). Pour atteindre le seuil d'excitation, il faudrait une perméabilité moyenne de $6 \mu_0$.

III-2. Courbes neutres

De façon à rendre compte de façon pertinente des résultats précédents, les courbes neutres, frontières entre l'état excité (au-dessus) et l'état diffusif (au-dessous) sont tracées en fonction des trois paramètres μ/μ_0 , q/q_n et T , pour une valeur de k correspondant à la hauteur réelle de l'écoulement hélicoïdal dans les assemblages.

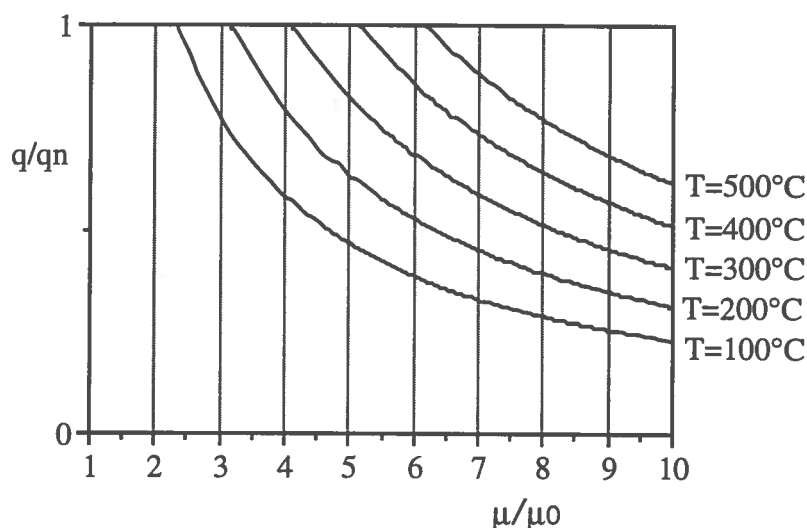


Fig.2.10- Courbes neutres pour $k=0.19$, correspondant à une hauteur $h=2m$. L'amplification au-dessus de la courbe est donnée en fonction des 3 paramètres de contrôle.

Le débit nominal étant le débit maximum autorisé, q/q_n est pris inférieur à 1.

- On remarque que quelque soit la température ($>100^\circ C$) et quelque soit le débit, l'effet dynamo est impossible pour une perméabilité moyenne du coeur égale à celle du sodium (sans assemblage ferromagnétiques).
- Dans le cas où 9.6% des assemblages ont une enveloppe ferromagnétique (figure 1.25), alors la perméabilité moyennée sur le coeur au prorata des sections est de l'ordre de $11.2 \mu_0$ (Annexe 2A). On constate que la présence des assemblages ferromagnétiques n'est donc pas anodine et entraîne l'amplification de \mathbf{B} à débit nominal, quelque soit la température de fonctionnement.
- On constate enfin que les effets mis en évidence (taux d'amplification croissant avec le débit et la perméabilité, décroissant avec la température) concordent à l'augmentation du R_m . En fait, l'influence de ces 3 paramètres se résume à l'existence d'un nombre de Reynolds magnétique critique R_{mc} au-delà duquel il y a effet dynamo. Pour $k=0.19$, on trouve (figure 2.11):

$$R_{mc} = 50$$

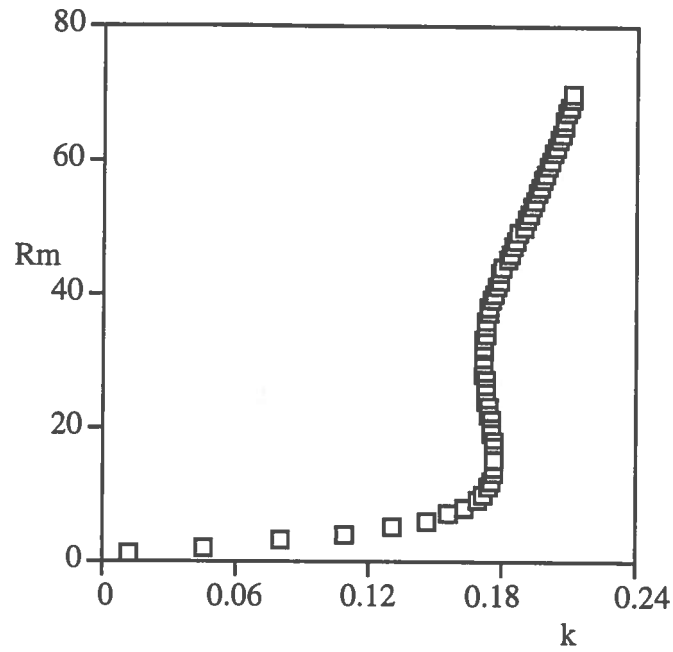


Fig. 2.11- Courbe neutre pour l'écoulement dans le coeur

On remarque que pour k légèrement inférieur à 0.18, il existe une fenêtre de valeurs de R_m où il n'y a pas d'effet dynamo. Cette observation valable pour d'autres régimes de vitesse sera justifiée en section III-4.

III-3. Allure géométrique des solutions

Pour une perméabilité moyenne égale à $10\mu_0$ (coeur avec 9.6% d'assemblages ferromagnétiques- Annexe 2A), l'allure géométrique des lignes de champ magnétique et de densité de courant a été tracée, de façon à mieux comprendre les phénomènes générateurs d'effet dynamo.

III-3a. Lignes de champ magnétique

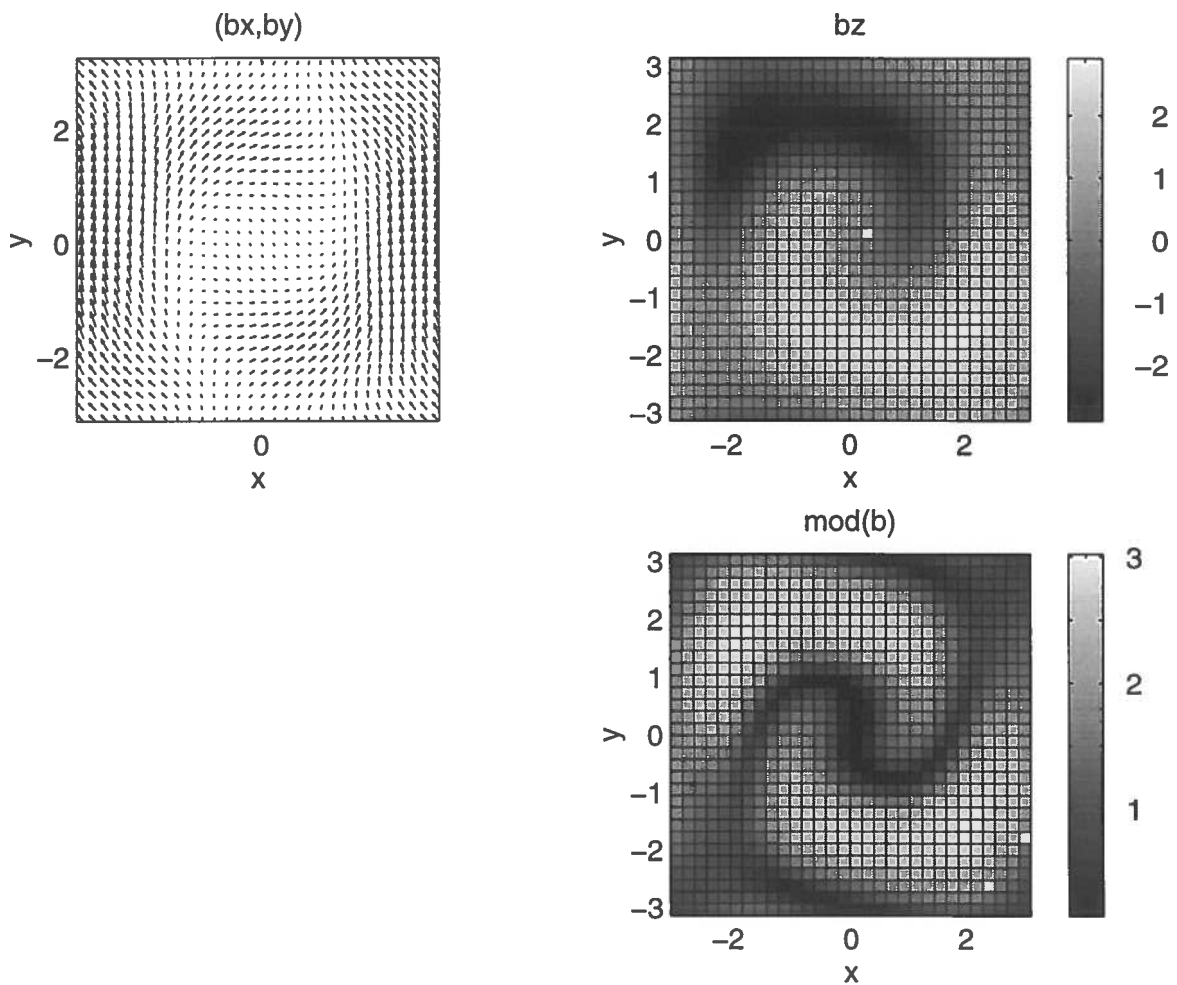


Fig. 2.12- Section horizontale dans une cellule. (bx, by)- Allure du champ magnétique horizontal. (bz)- Isovaleurs du champ magnétique axial. (mod(b))- Isovaleurs du module de \mathbf{b} .

On constate que la composante horizontale du champ magnétique est expulsée sur les bords de la cellule (rotation différentielle) et possède une composante moyenne non nulle à l'échelle de la cellule. La composante verticale est alternée dans la cellule et possède une moyenne nulle à l'échelle de la cellule. La composante verticale prédomine sur la composante horizontale, sauf sur les bords latéraux.