

### III-3b. Lignes de densité de courant

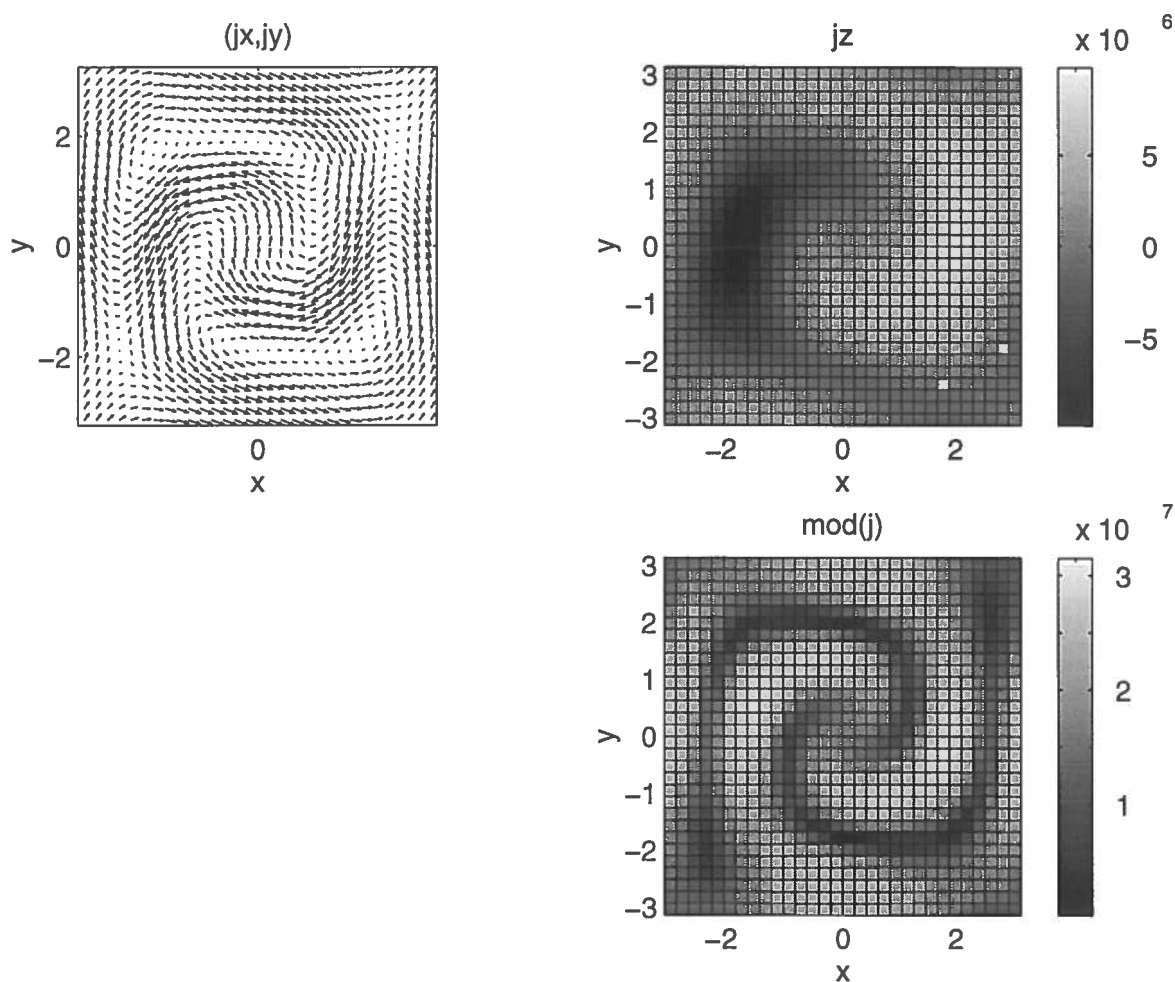


Fig. 2.13- Section horizontale dans une cellule:  $(j_x, j_y)$ - Allure de la densité de courant horizontale.  $j_z$ - Isovaleurs de la densité de courant axiale.  $\text{mod}(j)$ - Isovaleurs du module de  $\mathbf{j}$ .

On constate que la composante horizontale de la densité de courant électrique est répartie selon deux boucles de sens de rotation opposés. Sa moyenne sur la section horizontale d'une cellule est donc nulle (ce qui est cohérent avec une circulation nulle du champ magnétique sur le bord de la cellule). La composante verticale  $j_z$  est alternée et a donc également une moyenne nulle. Les composantes verticales et horizontales sont du même ordre de grandeur.

### III-3c. Interprétation qualitative des résultats

Dans ce paragraphe est proposé une justification heuristique de l'allure des lignes de champ magnétique et de densité de courant des figure 2.12 et 2.13.

Soit une distribution initiale de champ magnétique  $\mathbf{b}$ , horizontale et uniforme dans un plan horizontal de la forme  $\mathbf{b} = (0, b_0 e^{ikz}, 0)$ . La densité de courant associée est de la forme  $\mathbf{j} = (-ikb_0 e^{ikz}, 0, 0)$ .

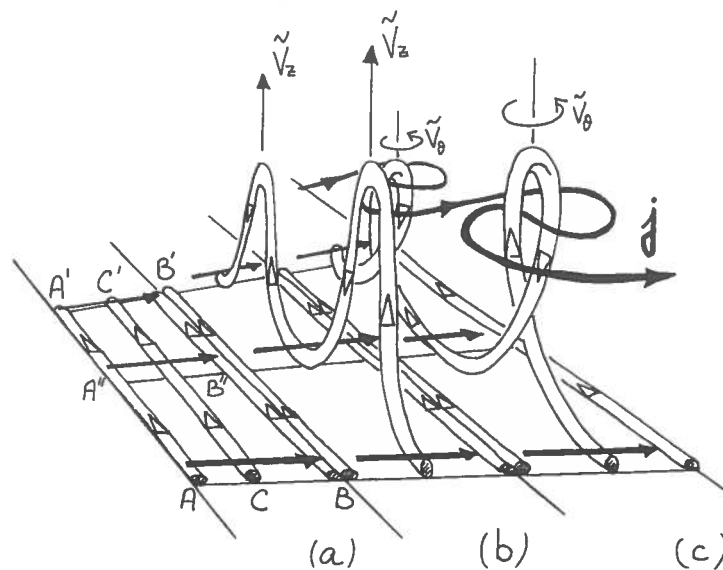


Fig.2.14- Effet dynamo généré par un réseau de vortex, illustré en 3 étapes. A chaque étape, 2 cellules voisines sont représentées. (a) Etat initial, AA', BB', CC' sont les lignes de champ magnétique, AB, A'B' et A''B'' sont les densités de courant. (b) Etirement par la composante axiale de l'écoulement. (c) Torsion par la rotation de l'écoulement.

Considérons maintenant une ligne de champ magnétique CC' (figure 2.14a). Elle va être déformée vers le haut par l'écoulement, générant un champ magnétique vertical de part et d'autre du centre de la cellule et de sens opposés (figure 2.14b). Sur les bords AA'A'' et BB'B'', les lignes de champ sont peu perturbées. Sur les bords AB, A'B' et A''B'', le courant est peu perturbé.

Considérons ensuite l'effet d'entraînement de la rotation du fluide. La ligne de champ centrale est alors tordue d'un angle  $\theta$ . Dans le cas des figures 2.12 et 2.13,  $\theta = 3\pi/2$  rad (figure 2.14c). Sur les bords AA'A'' et BB'B'', les lignes de  $\mathbf{B}$  sont peu affectées. On retrouve les lignes de densité de courant  $\mathbf{j}$  horizontales de la figure 2.13, celles sur les bords AB, A'B' et A''B'' étant peu perturbées.

### III-3d Nuage anti-dynamo

Pour une valeur plus faible de  $\chi$ , un nuage anti-dynamo a été mis en évidence. Lorsqu'on fait varier continûment  $R_m$ , à  $k$  donné, le système passe d'un état excité à un état diffusif puis à un état excité à grand  $R_m$  (figure 2.15).

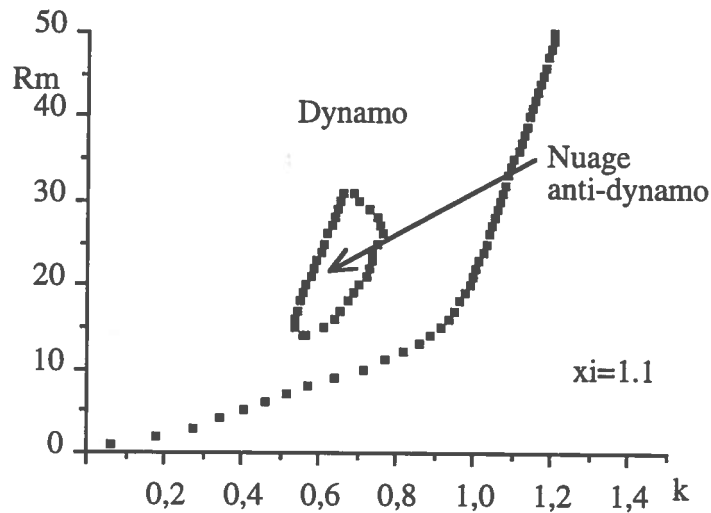


Fig. 2.15- Nuage anti-dynamo.

L'allure des lignes de champ magnétique et de densité de courant de part et d'autre du nuage anti-dynamo ont été tracées et correspondent:

- sous le nuage à une torsion simple ( $\theta = \pi/2$ )
- au-dessus du nuage à une torsion double ( $\theta = 3\pi/2$ )

Il semble donc que la présence du trou corresponde à un angle  $\theta$  intermédiaire ( $\theta = \pi$ ), empêchant l'auto-entretien du champ magnétique. Il est probable que la même sorte de phénomène soit à l'origine du décrochement observé à la figure 2.11.

Une justification théorique est proposée à la section suivante.

### III-4. Interactions entre petite et grande échelles

On s'intéresse aux 2 caractéristiques principales du champ de vitesse  $\mathbf{V}$ :

- 1) sa périodicité selon les deux directions  $\mathbf{l}_1$  et  $\mathbf{l}_2$
- 2) son indépendance par rapport à la coordonnée selon  $\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$

On montre alors qu'il y a interaction entre la valeur moyenne du champ magnétique (moyenne spatiale dans une section portée par  $\mathbf{l}_1$  et  $\mathbf{l}_2$ ) et sa valeur à l'échelle d'une cellule de périodicité.

#### III-4a. Equation de l'induction moyennée

Les champs de vitesse et d'induction magnétique sont décomposés en une partie moyenne et une partie fluctuante, comme il est habituellement fait pour les dynamos à plusieurs échelles [Steenbeck et al., 1966]:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}} + \tilde{\mathbf{h}}$$

où  $\bar{x}$  exprime la valeur de  $x$  moyennée sur la section droite d'une cellule. Le système (2.5) peut alors être décomposé en une partie moyenne et une partie fluctuante. La partie moyenne de la troisième équation de (2.5) étant nulle, on conserve la partie moyenne des deux premières équations et la partie fluctuante de la troisième, les termes d'advection ayant été placés dans le membre de gauche des équations:

$$(2.6) \begin{cases} p \bar{h}_x + ik(\bar{v}_z \bar{h}_x + \overline{\tilde{v}_z \tilde{h}_x}) = ik \overline{\tilde{v}_x \tilde{h}_z} - R_m^{-1} k^2 \bar{h}_x \\ p \bar{h}_y + ik(\bar{v}_z \bar{h}_y + \overline{\tilde{v}_z \tilde{h}_y}) = ik \overline{\tilde{v}_y \tilde{h}_z} - R_m^{-1} k^2 \bar{h}_y \\ p \tilde{h}_z + ik(\bar{v}_z + \tilde{v}_z) \tilde{h}_z + \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{h}_z}{\partial x} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{h}_z}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial x} (\bar{h}_x + \tilde{h}_x) + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial y} (\bar{h}_y + \tilde{h}_y) + R_m^{-1} \left( -k^2 + \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \tilde{h}_z \end{cases}$$

Les calculs algébriques menant à ces équations figurent en Annexe 2.B.

Deux remarques:

- Le champ magnétique à grande échelle est horizontal (confirmé par la figure 2.12).
- Si  $v_x = v_y = 0$  ou  $v_z = 0$ , alors les termes sources horizontaux ou verticaux disparaissent et un effet dynamo est impossible, ce qui confirme le théorème anti-dynamo 2D.

### III-4b. Advection différentielle

Dans la troisième équation du système (2.6),  $\tilde{h}_z$  apparaît comme le résultat de la distorsion de  $h_x$  et  $h_y$  par les dérivées horizontales de la composante verticale de la vitesse  $\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial y}$ .

La composante horizontale du champ magnétique est donc déformée vers le haut (figure 2.16). Par analogie au mécanisme de rotation différentielle [Moffatt, 1978], ce phénomène est baptisé advection différentielle. Il caractérise l'influence des gradients de vitesse axiale.

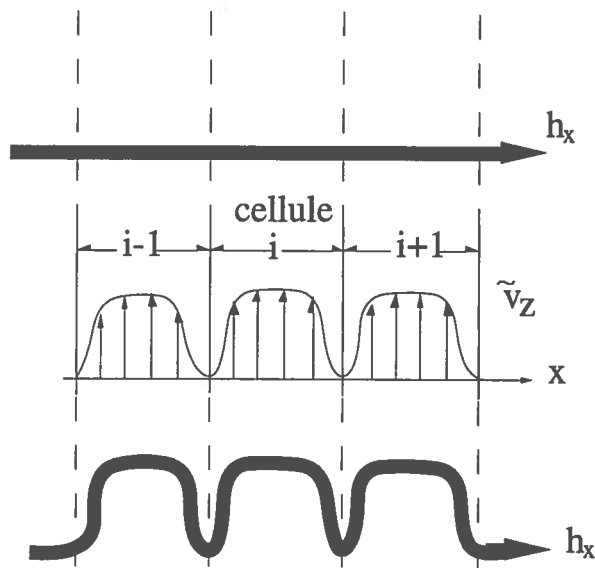


Fig. 2.16- Mécanisme d'advection différentielle

### III-4c Effet $\alpha$

Considérons ensuite la convection de cette ligne de champ  $\mathbf{h}_x$  par l'écoulement rotatif (figure 2.17). Cette ligne de champ prend alors la forme d'un solénoïde (figure 2.17b), générant une densité de courant  $\mathbf{j}$  à l'intérieur. Cette densité de courant à son tour pourra induire un champ magnétique  $\mathbf{h}_y$  (figure 2.17c).

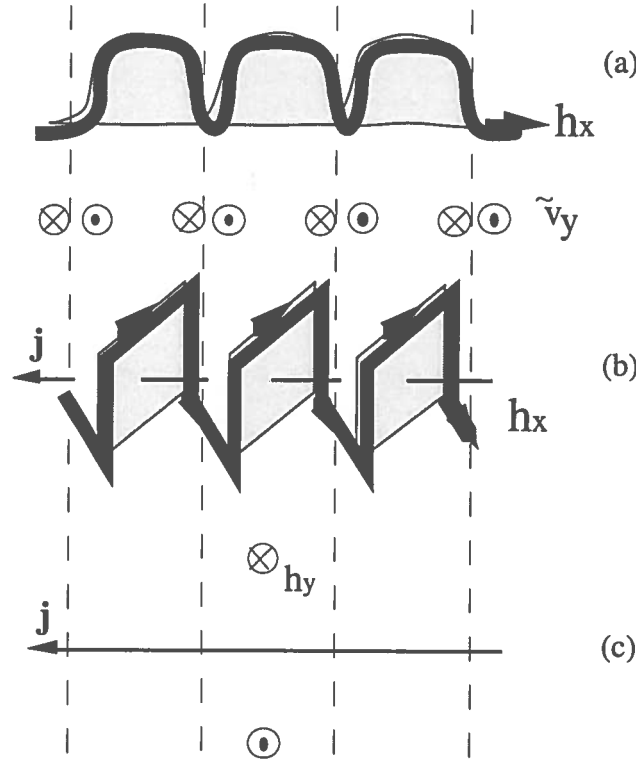


Fig.2.17- Mécanisme d'effet  $\alpha$

La partie moyenne dans une section horizontale de l'équation de l'induction (2.3) s'écrit sous la forme:

$$(2.7) \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{b}}}{\partial \tau} = \text{curl}(\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{b}}) + \text{curl} \mathcal{E} + \lambda \nabla^2 \bar{\mathbf{b}}$$

où le rotationnel de la force moyenne électromotrice  $\mathcal{E}$  est égale à:

$$\text{curl} \mathcal{E} = \text{curl}(\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{b}}) = \begin{cases} -ik(\overline{\tilde{\mathbf{v}}_z \tilde{\mathbf{h}}_x}) + ik \overline{\tilde{\mathbf{v}}_x \tilde{\mathbf{h}}_z} \\ -ik(\overline{\tilde{\mathbf{v}}_z \tilde{\mathbf{h}}_y}) + ik \overline{\tilde{\mathbf{v}}_y \tilde{\mathbf{h}}_z} \\ 0 \end{cases}$$

Dans (2.7), est reconnue la forme classique de l'équation de l'induction avec effet  $\alpha$  [Moffatt, 1978].

Dans le cas de la double torsion de la figure 2.14, la densité de courant est malgré tout opposée au champ magnétique dans la partie intérieure de la cellule (figure 2.13).

### III-4d. Mécanisme d'auto-amplification du champ magnétique

A la lumière des deux mécanismes décrit ci-avant, la génération à grande échelle du champ magnétique dans le domaine 3D peut être expliquée.

Considérons un champ magnétique initial  $\mathbf{b} = (\cos kz, 0, 0)$  et les deux sous-ensembles de lignes de champ magnétique:

- celles dirigées selon x dans le sens positif (lorsque  $kz \equiv 0$ )
- celles dirigées selon x dans le sens négatif lorsque (lorsque  $kz \equiv \pi$ ).

Tout d'abord, ces lignes de champ magnétiques sont tordues par advection différentielle, créant une composante verticale de champ magnétique. Ensuite ces lignes sont vrillées par effet  $\alpha$ , de façon à engendrer des densités de courant dans le sens opposé au champ magnétique qui leur a donné naissance. Ces densités de courant induisent à leur tour un champ magnétique selon y dans le sens positif pour  $kz \equiv \pi/2$ , selon y dans le sens négatif pour  $kz \equiv -\pi/2$ . Ainsi, le champ  $\mathbf{b} = (\cos kz, 0, 0)$  peut générer un champ moyen de la forme  $(0, \sin kz, 0)$ .

Pareillement, un champ magnétique initial  $\mathbf{b} = (0, \sin kz, 0)$  peut générer un champ moyen de la forme  $(\cos kz, 0, 0)$ .

Par conséquent, un champ magnétique initial  $\mathbf{b} = (\cos kz, \sin kz, 0)$  peut être auto-entretenu. L'aspect géométrique du champ est conservé (au glissement près), pendant que l'amplitude croît au cours du temps (figure 2.18).

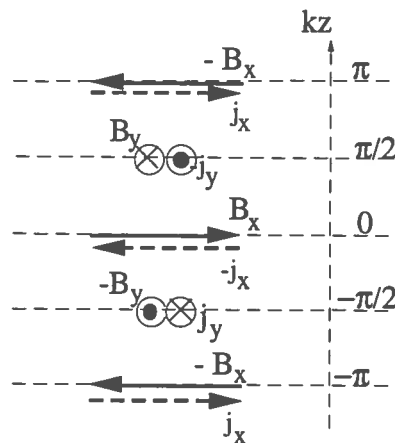


Fig. 2.18- Solution en champ magnétique, périodique en z, dans une cellule

La disparition de ce mécanisme dans le cas d'un nuage anti-dynamo pourrait justifier l'impossibilité d'effet dynamo. Il serait intéressant de caractériser  $\theta$  en fonction de  $k$ ,  $\chi$  et  $R_m$ . En particulier l'examen des isovaleurs de l'hélicité magnétique  $\mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{b}$  doit pouvoir renseigner sur la simple ou double torsion et sur leur transition. Enfin il faut noter l'importance des conditions périodiques aux bords des cellules, où le champ magnétique et la densité de courant ne sont pas affectés par l'écoulement ( $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ).

## IV- Conclusions

### IV-1. Résultats de l'analyse de stabilité temporelle

#### IV-1a. Sans assemblages ferromagnétiques

- L'effet dynamo est impossible pour des conditions de fonctionnement nominales, dans un coeur constitué d'assemblages identiques dont l'enveloppe est fabriquée en acier austénitique ( $\mu = \mu_0$ ).

#### IV-1b. Avec 9.6% d'assemblages ferromagnétiques

- Dans la configuration du coeur comprenant 9.6% d'assemblages ferromagnétiques (Annexe 2A), l'effet dynamo devient possible si l'on considère que la perméabilité magnétique est distribué de façon homogène dans tout le coeur ( $\mu=11.2 \mu_0$ ).

#### IV-1c. Mécanisme d'auto-amplification

- Dans le cas d'un écoulement 2D-périodique, les mécanismes d'amplification du champ magnétique ont été mis en évidence: advection différentielle à l'échelle des cellules et effet  $\alpha$  à l'échelle du coeur. Ils permettent de justifier l'entretien de la composante horizontale du champ magnétique à grande échelle.



## IV-2. Limites de l'étude

### IV-2a. Influence de modes horizontaux rationnels

Dans la décomposition de  $\mathbf{H}$ ,  $m$  et  $n$  sont pris égaux à des entiers, de façon à ce que la résolution soit plus simple. Cependant, rien n'interdit d'après l'analyse de G. O. Roberts de choisir une dépendance rationnelle par rapport aux coordonnées de périodicité, avec  $\mathbf{H}$  s'exprimant par exemple sous la forme:

$$\mathbf{H}(\eta, \zeta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{mn} \exp(i(m+f_1)\eta + i(n+f_2)\zeta) \quad \text{avec } 0 < f_1 < 1 \text{ et } 0 < f_2 < 1.$$

Cela permet de déterminer alors de nouvelles possibilités de comportement dynamo par rapport à l'étude précédente.

Une approche de cette sorte a été entreprise par Tilgner et Busse (1995), avec l'écoulement retenu pour l'étude expérimentale menée à Karlsruhe. Il apparaît que l'influence des modes rationnels est en fait négligeable (communication personnelle).

### IV-2b. Influence de l'aspect fini en hauteur de la géométrie réelle

La seconde remarque concerne la dépendance en  $z$  de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ . Cette dernière est recherchée périodique en  $z$ , puis, de façon à prendre en compte la hauteur finie du réacteur, on impose un nombre d'onde  $k$  minimum permettant au champ magnétique de se développer avec une longueur d'onde maximum égale à la hauteur de la partie hélicitaire de l'écoulement.

Une autre méthode plus précise mais plus compliquée à mettre en oeuvre consiste à considérer que  $k$ , en plus de sa partie réelle, a une partie imaginaire non nulle. Cela permet alors de pouvoir représenter une dépendance du module de  $\mathbf{B}$  en fonction de  $z$  [Landau et Lifchitz, 1971], [Gailitis, 1988]. En considérant ensuite deux solutions  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$ , vérifiant les relations suivantes:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1(\eta, \zeta) \exp(p_1 t + ik_1^R z - k_1^I z) \text{ et } \mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2(\eta, \zeta) \exp(p_2 t + ik_2^R z - k_2^I z)$$

avec  $k_1^R - k_2^R = \frac{2\pi}{H}$ ,  $k_1^I = k_2^I$ ,  $\mathbf{H}_1 \approx \mathbf{H}_2$  et  $p_1 \approx p_2$

alors:  $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 = \mathbf{H}(\eta, \zeta) \exp(pt + ik_2^R z - k_2^I z) \left( \exp\left(i\frac{2\pi}{H}z\right) - 1 \right)$

il en résulte un champ magnétique  $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$  périodique selon  $z$ , de période égale à  $H$ , et nul aux extrémités.

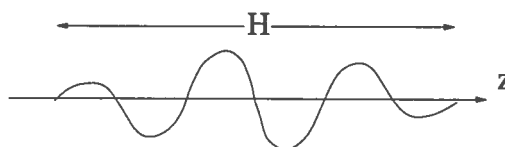


Fig. 2.19- Fonction périodique avec effets de bords

#### **IV-2c. Influence du nombre fini d'assemblages**

Le nombre d'assemblages est considéré comme infini. En réalité, le coeur de Phenix comprend 103 assemblages combustibles et fertiles. Est-ce un nombre suffisamment grand pour justifier l'hypothèse de périodicité suivant les deux directions horizontales  $L_1$  et  $L_2$  ?

#### **IV-2d. Influence de la protection neutronique latérale**

Les éléments composant la protection neutronique latérale (autour des assemblages combustibles et fertiles) sont constitués de matériaux ferromagnétiques. En se référant à une étude antérieure [Marty et al 1993], il est probable qu'une perméabilité extérieure plus grande que celle régnant à l'intérieur puisse infléchir de façon conséquente la valeur du nombre de Reynolds magnétique critique.

#### **IV-2e. Influence de la distribution discrète et non symétrique des assemblages ferromagnétiques**

L'évaluation de la présence dans le coeur de 20% d'assemblages dont l'enveloppe est ferromagnétique a été faite au prorata des sections concernées, puis réparties en moyenne dans tout le coeur. Cette répartition homogène de la perméabilité magnétique ne tient donc pas compte des déformations des lignes de champ magnétiques particulières dues aux assemblages dont l'enveloppe est ferromagnétique. Cette répartition homogène ne tient pas compte non plus de l'affaiblissement des interactions induites par les enveloppes ferromagnétiques. Il est probable en effet que les enveloppes ferromagnétiques agissent comme un bouclier magnétique, isolant l'intérieur de l'assemblage correspondant du reste du coeur.

### **IV-3. Conclusions**

Cette étude a mis en lumière l'importance de la présence d'assemblages ferromagnétiques dans le coeur. En effet, leur perméabilité magnétique élevée peut en moyenne suffire à dépasser le nombre de Reynolds magnétique critique du système au-delà duquel il y aurait effet dynamo. Cependant, la prise en compte d'une distribution moyenne de perméabilité magnétique est contestable. En effet, l'aspect discret de la distribution réelle peut avoir une influence sur la répartition des lignes de champ magnétique. Il est donc apparu nécessaire de modéliser la distribution réelle des assemblages ferromagnétiques en discrétisant l'espace de travail en éléments finis et en résolvant l'équation de l'induction en moyenne dans chaque élément. Les hypothèses, le détail de la méthode et les résultats obtenus sont décrits en partie 3.

## Annexe 2A

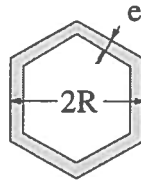
### Calcul de la perméabilité moyenne du coeur lorsque 9.6% des assemblages sont ferromagnétiques

Soit un assemblage de rayon extérieur R et dont l'enveloppe a une épaisseur e.

( $R=61.85 \cdot 10^{-3}\text{m}$  et  $e=3.4 \cdot 10^{-3}\text{m}$ ).

Nous calculons:

- 1) La perméabilité moyenne de l'assemblage lorsque son enveloppe est ferromagnétique
- 2) La perméabilité moyenne du coeur lorsque celui-ci est constitué de 26 assemblages ferromagnétiques et 247 non ferromagnétiques (total de 271 assemblages correspondant aux 9 couronnes du coeur combustible plus fertile).



La surface de l'assemblage complet est donnée par:

$$S_{\text{Ass}} = 2\sqrt{3}R^2$$

La surface de l'assemblage intérieure à l'enveloppe est donnée par:

$$S_{\text{int}} = 2\sqrt{3}(R - e)^2$$

La surface de l'enveloppe est donnée par:

$$S_{\text{env}} = 2\sqrt{3} e (2R - e)$$

Par conséquent,

- 1) La perméabilité moyenne de l'assemblage dont l'enveloppe est ferromagnétique est:

$$\mu_{(\text{Ass. Fe})} = \frac{10^3 S_{\text{env}} + S_{\text{int}}}{S_{\text{env}} + S_{\text{int}}} \mu_0 = 107.73 \mu_0$$

- 2) La perméabilité moyenne du coeur (combustible+fertile) lorsque celui-ci est constitué de 26 assemblages ferromagnétiques sur 271, est:

$$\mu_{(\text{Coeur Fe})} = (1 - r)\mu_0 + r\mu_{(\text{Ass. Fe})} = 11.24 \mu_0, \text{ avec } r = \frac{26}{271} = 9.66\%$$

## Annexe 2B

### Calculs menant aux équations moyennées vérifiées par l'induction magnétique

Puisque  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{h}$  ne dépendent pas de  $z$ , et dépendent de façon périodique de  $x$  et  $y$ , leur valeur moyenne est constante sur une section d'assemblage. Par conséquent:

$$\overline{\text{grad} \mathbf{v}} = 0 \text{ et } \overline{\text{grad} \mathbf{h}} = 0$$

$\mathbf{v}(x, y)$  étant  $(l_1, l_2)$  périodique,  $\overline{v_x} = \overline{v_y} = 0$  et  $\overline{\text{grad} \mathbf{v}} = 0$ . Pour la même raison,  $\overline{\text{grad} \mathbf{h}} = 0$ .

Ainsi, la divergence nulle de  $\mathbf{v}$  s'écrit:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{v}_y}{\partial y} = 0,$$

et celle de  $\mathbf{b}$ :

$$\frac{\partial \widetilde{h}_x}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{h}_y}{\partial y} + ik \widetilde{h}_z = 0, \text{ and } \overline{h_z} = 0.$$

Les relations suivantes peuvent donc être déduites,  $q$  représentant successivement les trois composantes cartésiennes  $x, y$  et  $z$ :

$$\overline{\frac{\partial \widetilde{h}_q}{\partial x} \widetilde{v}_x} + \overline{\frac{\partial \widetilde{h}_q}{\partial y} \widetilde{v}_y} = 0$$

$$\overline{\frac{\partial \widetilde{v}_q}{\partial x} \widetilde{h}_x} + \overline{\frac{\partial \widetilde{v}_q}{\partial y} \widetilde{h}_y} = ik \overline{\widetilde{v}_q \widetilde{h}_z}$$

# **Troisième partie**

**Modélisation de l'Effet Dynamo cinématique  
par la méthode des Eléments Finis.  
Application au coeur d'un RNR.**

# I- Hypothèses

## I-1. Modélisation de l'écoulement

### I-1a. Préliminaires

L'expression analytique de l'écoulement défini en Partie 2 (2.1) est principalement fondée sur les résultats expérimentaux mesurés dans le canal périphérique d'un assemblage à 19 aiguilles. L'écoulement y est hélicoïdal, de pas sensiblement égal à celui du fil espaceur. Il en résulte une exagération probable du paramètre de vissage  $\chi$  en moyenne sur l'assemblage. Dans cette troisième partie, on a tenté de reproduire plus fidèlement les principales caractéristiques, sur le plan dynamo, d'un écoulement réel dans un assemblage comprenant 217 aiguilles.

La modélisation fine d'un écoulement 3D parcourant un assemblage à 217 aiguilles dépasse la limite des possibilités numériques actuelles (même sur Cray), en matière de nombre de mailles nécessaires et donc de taille du système à résoudre. Par conséquent, il est exclu de pouvoir modéliser finement la centaine d'assemblage du coeur, surtout si ceux qui ont des propriétés électromagnétiques singulières sont disposés de façon aléatoire, ce qui supprime tout espoir de symétrie. Par conséquent, comme en Partie 2, une approximation de l'écoulement dans chaque assemblage est nécessaire.

La géométrie exacte des aiguilles ne pouvant pas être représentée, l'écoulement sera réparti sur toute la section de l'assemblage. Cependant, et contrairement à l'écoulement (2.1), l'influence de ces 217 aiguilles est prise en compte en conservant l'hélicité moyenne de l'écoulement d'une part et la vitesse débitante d'autre part (Partie 3 §I-1b).

## I-1b. Méthode

- A partir des résultats établis numériquement par une méthode de volumes finis [Lafay et al 1975] concernant l'écoulement dans un assemblage à 19 aiguilles (figure 3.1), l'hélicité linéique (par unité de longueur axiale) correspondante est évaluée sur la section de l'assemblage.

- Puis, une extrapolation de ce résultat à un assemblage à 217 aiguilles est réalisée, déterminant ainsi une densité d'hélicité moyenne en tout point de l'assemblage.

- La vitesse débitante moyenne est calculée de façon à conserver le débit de sodium rapporté à la surface de l'assemblage.

- L'expression du champ de vitesse est donnée de façon analytique pour l'assemblage centré en  $x=y=0$ . La modélisation adoptée étant de type éléments finis pour la discrétisation spatiale, ce champ de vitesse est ensuite implanté dans les autres assemblages du coeur, moyennant un changement de repère. La disposition périodique des assemblages ainsi que leurs sections de forme hexagonale est réalisée préalablement par un mailleur 3D.

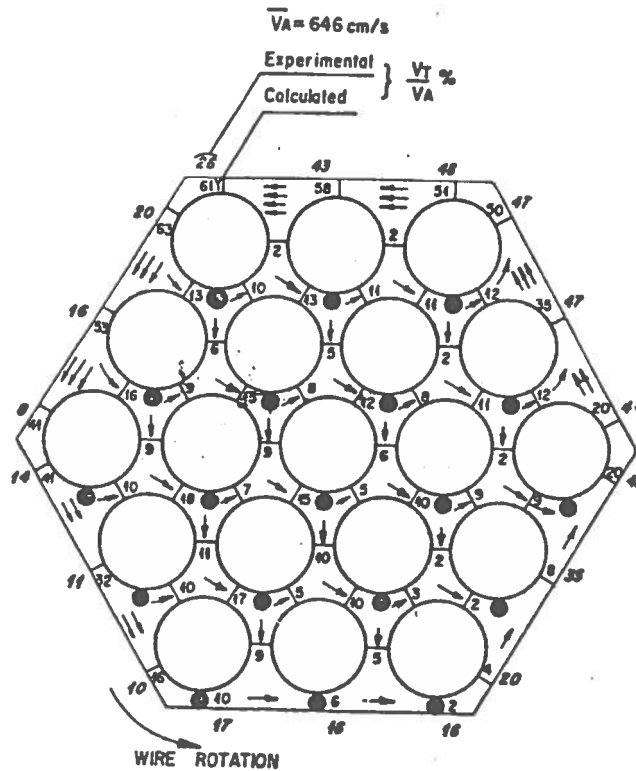


Fig.3.1- Organisation de l'écoulement transverse  $V_T$  par rapport à l'écoulement axial  $V_A$ , pour un assemblage comportant 19 aiguilles [Lafay et al 1975].

### I-1c. Ecoulement autour d'une aiguille

Considérons une aiguille (i) parmi les N comprises dans un assemblage (figure 3.2).

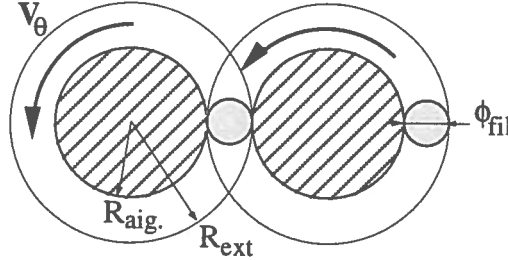


Fig. 3.2- Deux aiguilles voisines, entourées de leur fil espaceur respectif. Vue en section droite.

L'écoulement autour de cette aiguille, entourée de son fil, est supposé hélicoïdal en bloc. Son expression est donnée dans un repère cylindrique:

$$\text{pour } r < R_{\text{aig.}}, \begin{cases} V_{\theta} = 0 \\ V_z = 0 \end{cases} \quad \text{pour } R_{\text{aig.}} < r < R_{\text{ext.}}, \begin{cases} V_{\theta} = r \omega_i \\ V_z = V_A \end{cases}$$

où  $R_{\text{aig.}}$  désigne le rayon commun de toutes les aiguilles,  $R_{\text{ext.}} = R_{\text{aig.}} + \phi_{\text{fil}}$ ,  $V_A$  la vitesse axiale de l'écoulement et  $\omega_i$  la vitesse de rotation de l'écoulement autour de l'aiguille (i). La densité d'hélicité, linéique dans le sens vertical, vaut:

$$d\mathcal{H}_i = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V} = \omega_i V_A$$

et l'hélicité linéique intégrée sur la section de l'écoulement autour de l'aiguille:

$$\mathcal{H}_i = V_A \omega_i \pi (R_{\text{ext.}}^2 - R_{\text{aig.}}^2)$$

Appelons  $\chi_i$  le paramètre de vissage de l'écoulement autour de l'aiguille (i). Alors sa valeur moyenne est donnée par:

$$\chi_i = \frac{V_A}{(V_{\theta})_{\text{moyen}}} = \frac{V_A}{\left(\frac{R_{\text{aig.}} + R_{\text{ext.}}}{2}\right) \omega_i}$$

On en déduit l'expression de  $\mathcal{H}_i$ :

$$\mathcal{H}_i = \frac{2\pi V_A^2 \phi_{\text{fil}}}{\chi_i}$$

Pour un ensemble de N aiguilles, l'hélicité de l'écoulement vaut donc:

$$(3.1) \quad \mathcal{H} = 2V_A^2 \pi \phi_{\text{fil}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\chi_i}$$

Pour évaluer l'hélicité moyenne de l'écoulement dans un assemblage, il reste à déterminer l'ensemble des  $\chi_i^{-1}$ .



### I-1d. Interprétation des résultats de l'étude CEA (assemblage à 19 aiguilles)

On remplace la cartographie de l'écoulement de la figure 3.1 par un réseau d'écoulement hélicoïdaux tous de même sens, de façon à ce que la vitesse entre les aiguilles soit conservée (figure 3.3).

Considérons que l'écoulement entre deux aiguilles résulte de la somme vectorielle des deux écoulements hélicoïdaux en bloc, induit par le fil espaceur entourant chacune des aiguilles. On a donc  $V_T = r\omega_i + (L-r)\omega_{i+1}$ , pouvant être positif ou négatif. On simplifie cette expression en prenant une valeur moyenne sur le fluide, entraînant que  $V_T > 0$  si  $\omega_i > \omega_{i+1}$  et  $V_T < 0$  si  $\omega_i < \omega_{i+1}$ .

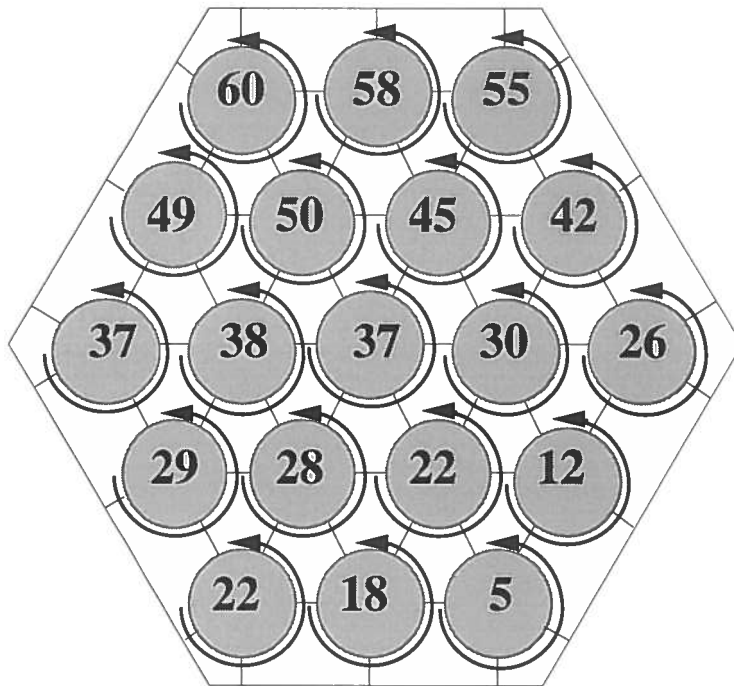


Fig.3.3- Répartition des  $(\chi_i)^{-1}$  dans un assemblage à 19 aiguilles

On en déduit la valeur de  $\sum_{i=1}^{19} \chi_i^{-1} = 6.63$

Par conséquent, la valeur de l'hélicité linéique moyenne dans l'assemblage à 19 aiguilles est donnée par:

$$\mathcal{H} = 1.56$$

Les données nécessaires au calcul de cette valeur figurent en Annexe 3A

## I-1e. Caractéristiques de l'écoulement dans un assemblage à 217 aiguilles

### Hélicité linéique

L'hélicité linéique d'un assemblage à 217 aiguilles est donnée par la relation (3.1) avec  $N=217$ .

La somme des  $\chi_i^{-1}$  est évaluée pour un assemblage à 217 aiguilles à partir de la somme des  $\chi_i^{-1}$  pour un assemblage à 19 aiguilles, en supposant qu'ils sont dans le même rapport que leurs sections droites respectives. Cette hypothèse signifie que l'on affecte la même hélicité moyenne à chaque bloc de 19 aiguilles et que l'on fait la somme de tous les blocs composant l'assemblage de 217 aiguilles.

De nature empirique, cette formulation est d'autant plus approximative que les 19 aiguilles de l'expérience et les 217 composant un assemblage combustible, n'ont pas exactement le même diamètre et les fils espaceurs de l'un et de l'autre ne sont pas non plus identiques. Cette évaluation nous conduit malgré tout au résultat suivant:

$$\sum_{i=1}^{217} \chi_i^{-1} = \frac{S_{\text{ass}217}}{S_{\text{ass}19}} \sum_{i=1}^{19} \chi_i^{-1} \quad \text{et } \mathcal{H} = 13.25$$

### Moyenne débitante

La vitesse débitante est calculée de façon à ce que le débit réel soit conservé:

$$\bar{V}_z = V_A \frac{S_{\text{Na}217}}{S_{\text{ass}217}}$$

Les données nécessaires aux calculs figurent en Annexe 3A.

## I-1f. Modélisation de l'écoulement dans le coeur

Chaque assemblage est divisé en trois zones réparties en hauteur (figure 3.4):

- Une partie centrale où l'écoulement est hélicitaire, l'hélicité linéique et la vitesse axiale débitante étant déduites du calcul précédent.
- Deux parties symétriques, aux extrémités inférieures et supérieures de l'assemblage, où l'écoulement est purement axial, de façon à tenir compte de l'effet fini de l'hélicité localisée en partie centrale de l'assemblage (en opposition à la partie 2 où l'hélicité était infinie)
- Deux parties symétriques de transition entre l'écoulement hélicitaire et l'écoulement axial.

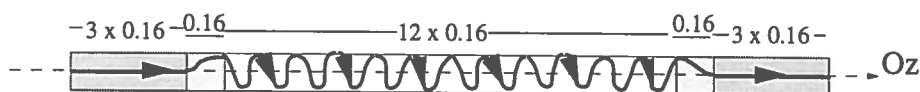


Fig. 3.4- Répartition en hauteur de l'écoulement dans chaque assemblage.

## Écoulement en partie centrale

L'écoulement est modélisé par une rotation en bloc plus une composante axiale de type Poiseuille. Pour un assemblage centré au point de coordonnées  $(x_0, y_0)$ , le champ de vitesse est donné en coordonnées cartésiennes par:

$$\begin{cases} V_x = -\omega (y - y_0) \\ V_y = \omega (x - x_0) \\ V_z = 2\bar{V}_z \left[ 1 - \frac{1}{R^2} \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right\} \right] \end{cases}$$

où  $\omega$  et  $\bar{V}_z$  sont déterminés à partir des évaluations précédentes:

La conservation de l'hélicité linéique déterminée dans les calculs précédents conduit à la valeur de  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\mathcal{H}}{2\pi R^2 \bar{V}_z}$$

## Écoulement dans les zones extrêmes

L'écoulement est identique au précédent avec une rotation égale à zéro:

$$\begin{cases} V_x = V_y = 0 \\ V_z = 2\bar{V}_z \left[ 1 - \frac{1}{R^2} \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right\} \right] \end{cases}$$

## Écoulement dans les zones de transition

La transition entre la rotation nulle et  $\omega$  est assurée par une fonction de raccordement en  $\cos^2$ :

$$\begin{cases} V_x = -\omega (y - y_0) \cos^2\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \\ V_y = \omega (x - x_0) \cos^2\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \\ V_z = 2\bar{V}_z \left[ 1 - \frac{1}{R^2} \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right\} \right] \end{cases}$$

où  $h$  correspond à une longueur d'onde de l'écoulement hélicoïdal en bloc ( $\omega, \bar{V}_z$ ).

On vérifie dans les trois zones que le champ de vitesse est bien à divergence nulle.

## I-2. Propriétés électromagnétiques

Le modèle de résolution, présenté dans la section suivante, accepte une distribution quelconque des propriétés électromagnétiques dans le domaine géométrique représenté.

Dans le cas du réacteur, les enveloppes des assemblages présentant une forte perméabilité magnétique peuvent donc être maillées et le champ magnétique peut y être calculé. Cependant le maillage de ces zones doit être d'autant plus fin que le saut de propriété magnétique entre ces zones et leur voisinage est grand. L'objectif de l'étude étant de représenter au moins 5 couronnes d'assemblages, il est opportun de s'affranchir du maillage supplémentaire de ces zones. Les enveloppes ferromagnétiques ne seront donc pas maillées dans le cas de simulation du coeur. Leur influence est cependant prise en compte grâce à des conditions aux limites présentées au paragraphe I-2d.

### I-2a. Conductivité électrique

La conductivité électrique  $\sigma$  dans tout le coeur est considérée comme homogène, calculée de la même manière qu'en partie 2, en effectuant la moyenne dans une section horizontale des conductivités des différents matériaux le constituant (sodium, enveloppes en inox, matière combustible):

$$\sigma_{\text{ass.}} = \frac{S_{\text{Na}}}{S_{\text{ass.}}} \sigma_{\text{Na}} + \frac{S_{\text{env.}}}{S_{\text{ass.}}} \sigma_{\text{env.}} + \frac{S_{\text{comb.}}}{S_{\text{ass.}}} \sigma_{\text{comb.}}$$

Les chemins suivis par les courants électriques sont donc supposés équiprobables dans le coeur. En réalité, les courants ont tendance à circuler d'avantage dans le sodium compte-tenu de sa grande conductivité électrique par rapport aux autres éléments.

Les conductivités  $\sigma_{\text{Na}}$ ,  $\sigma_{\text{env.}}$  et  $\sigma_{\text{comb.}}$  étant du même ordre de grandeur, la valeur de conductivité retenue est celle du sodium. Cette hypothèse induit probablement une légère exagération du nombre de Reynolds magnétique équivalent.

## I-2b. Perméabilité magnétique

La présence d'une ceinture entourant le coeur constituée de matériaux ferromagnétiques, et d'assemblages dont l'enveloppe est aussi ferromagnétique risque de modifier fortement le trajet des lignes de champ magnétique par rapport au cas homogène. En effet, considérons deux zones (1) et (2) de perméabilités respectives  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Les relations de continuité de la composante normale de  $\mathbf{B}$  et de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$ , se traduisent par la loi de réfraction classique:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\mu_1} = \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\mu_2}$$

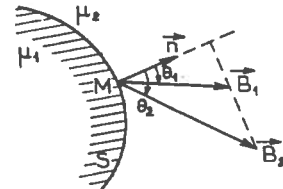


Fig. 3.5- Loi de réfraction de l'induction

C'est en appliquant cette loi aux cas du coeur que les approximations suivantes sont justifiées.

## I-2c. Ceinture ferromagnétique

La Protection Neutronique Latérale, entourant le coeur fertile et combustible, est constituée d'assemblage en acier ferromagnétique et de rondins contenant des matériaux ferromagnétiques. Elle constitue donc une ceinture ferromagnétique.

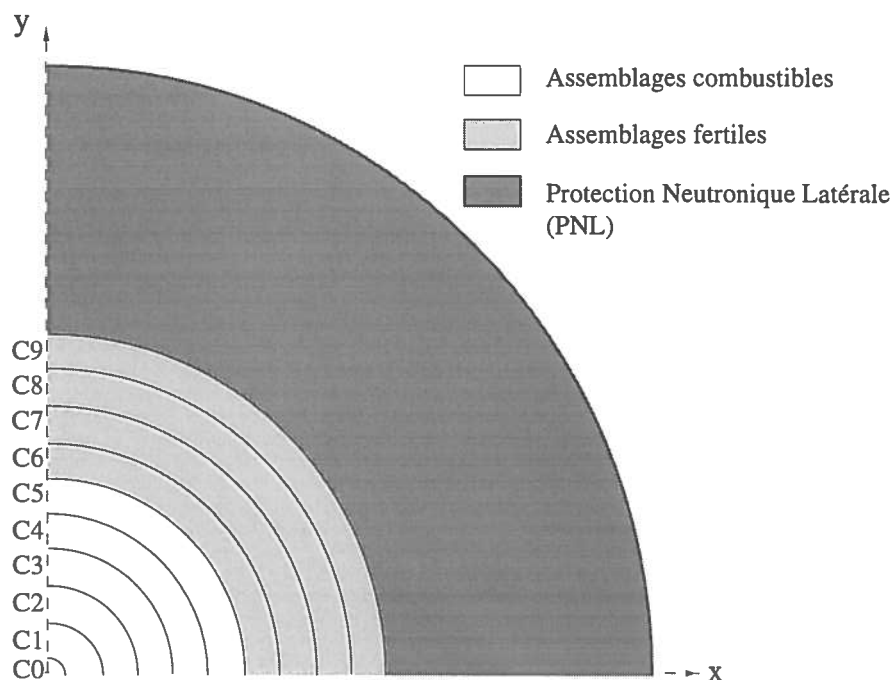


Fig. 3.6- Répartition en couronnes du coeur de Phenix, chaque couronne  $C_k$  contenant  $6k$  assemblage. La PNL est constituée essentiellement de matériaux ferromagnétiques.

Si l'on considère (figure 3.7) un courant électrique créant une induction  $\mathbf{B}$  dans un domaine (2) de perméabilité  $\mu_0$ , à proximité d'un voisinage ferromagnétique (1), alors les lignes de  $\mathbf{B}$  ont tendance à arriver perpendiculairement à la frontière séparant (1) de (2).

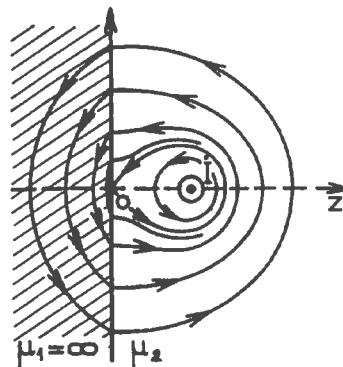


Fig. 3.7- Influence d'un domaine ferromagnétique (1) sur les lignes de champ créées en (2) par un courant électrique dans un fil [Durand 1968].

Le rapport de perméabilité entre la ceinture et le coeur étant de  $10^3$ , on supposera que les lignes de champ magnétique en provenance du coeur arrivent perpendiculairement à la ceinture. Cette dernière étant située au-delà de la dixième couronne d'assemblages, elle est modélisée par la frontière extérieure du domaine de calcul, sur laquelle la condition de Neumann sur  $\mathbf{A}$  est appliquée, induisant la relation suivante (chapitre II):

$$\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{A}$  n'étant calculé qu'à l'intérieur du domaine.

### I-2d. Assemblages ferromagnétiques

Prenons le cas d'une enveloppe cylindrique, de perméabilité  $\mu$  et d'épaisseur non nulle, séparant une zone interne de rayon  $a$  d'une zone externe de rayon  $b$  toutes deux de perméabilité  $\mu_0$  (figure 3.8). L'objectif est d'évaluer l'interaction entre les champs magnétiques interne et externe, pour des valeurs de  $a$  et  $b$  correspondant aux dimensions d'un assemblage et pour un rapport des perméabilités entre l'enveloppe et le reste du domaine (intérieur et extérieur):

$$\mu/\mu_0 = 10^3.$$

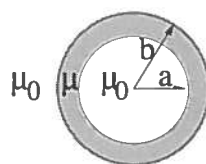


Fig. 3.8- Section d'une couronne cylindrique

• **Pénétration du champ extérieur à l'intérieur**

Soit une induction magnétique  $B_{ext}$ , établie par une source extérieure au cylindre. Alors, l'intensité relative du champ pénétrant dans la zone interne vaut [Durand 1968, formule (452)]:

$$\frac{B_{int}}{B_{ext}} = \frac{4}{\frac{\mu}{\mu_0} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

Pour des dimensions correspondant à celles d'un assemblage, on trouve:

$$\frac{B_{int}}{B_{ext}} = 3,74\%$$

L'allure des lignes de champ pour une enveloppe cylindrique circulaire de perméabilité infinie est représentée en figure 3.9.

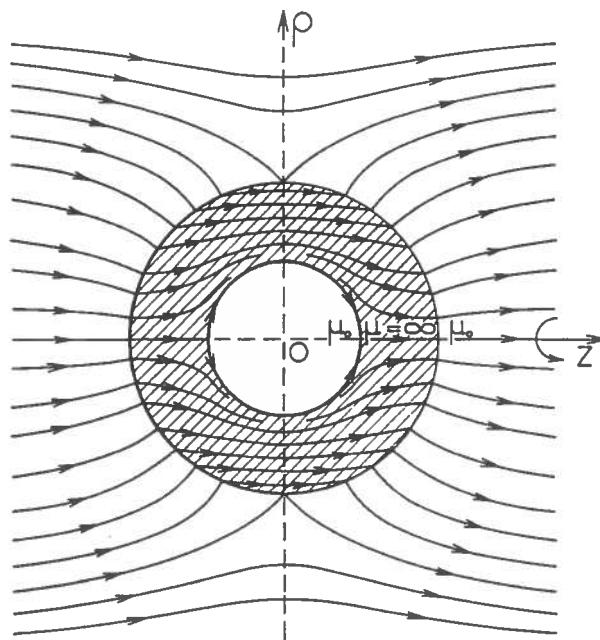


Fig. 3.9- Déformation des lignes de champ magnétique par une couronne ferromagnétique. Cas d'une source extérieure [Durand 1968].

### • Pénétration du champ intérieur à l'extérieur

Soit un champ magnétique  $B_{int}$ , créé par un courant  $I$  intérieur à une enveloppe cylindrique (figure 3.10).

Alors l'intensité relative du potentiel vecteur  $A$  se propageant à l'extérieur, vaut, pour des dimensions analogues à un assemblage [Durand 1968, formules (474), (476)]:

$$\frac{A_{ext}}{A_{int}} = 3,37\%$$

L'allure des lignes de champ pour une enveloppe cylindrique circulaire de perméabilité infinie est représentée en figure 3.10.

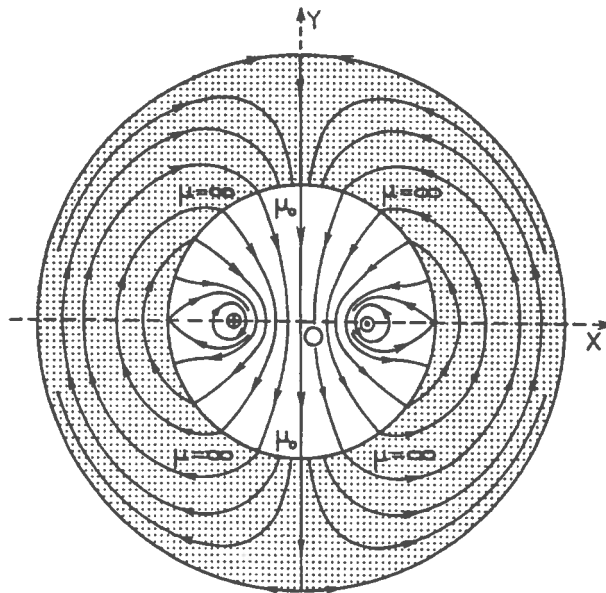


Fig. 3.10- Déformation des lignes de champ magnétique par une couronne ferromagnétique. Cas d'une source intérieure [Durand 1968].



- **Conclusion**

L'enveloppe ferromagnétique d'un assemblage se comporte donc comme un blindage, limitant fortement les interactions entre induction extérieure et intérieure (figure 3.11a).

Par conséquent, chaque assemblage dont l'enveloppe est ferromagnétique peut être remplacé par un bloc cylindrique hexagonal, de perméabilité homogène égale à  $10^3\mu_0$ , sans écoulement. La modélisation de ces "barreaux" permet ainsi de conserver le parcours des lignes de champ externes. En pratique, la perméabilité de ces barreaux ne sera que de  $10^2\mu_0$ , pour éviter un déséquilibre trop grand du conditionnement du système numérique à résoudre.

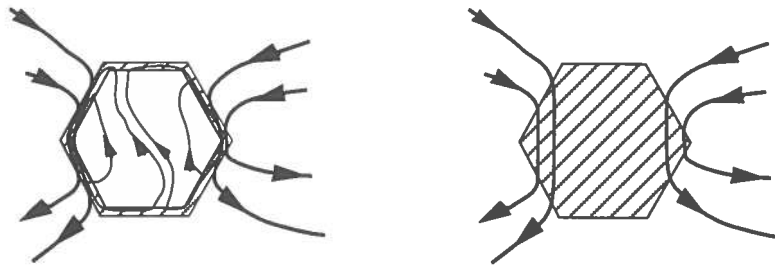


Fig. 3.11- Comparaison entre la réalité et la modélisation. La faible interaction entre le champ magnétique interne et externe (a) permet de modéliser l'assemblage dont l'enveloppe est ferromagnétique par un barreau ferromagnétique (b).

## II- Modélisation

La modélisation des équations de la dynamo cinématique dans le coeur du RNR Phenix doit répondre au cahier des charges suivant:

Résoudre, pour un écoulement donné les équations de Maxwell et la loi d'Ohm

- Dans une géométrie 3D quelconque (non axisymétrique).
- En régime instationnaire.
- Avec une répartition des propriétés électromagnétiques quelconque (éventuellement discontinue et non axisymétrique).

Cette modélisation a fait l'objet d'une analyse préliminaire dont les grandes lignes sont évoquées ci-après.

## II-1. Préliminaires

### II-1a. Pourquoi les Eléments Finis ?

Parmi les méthodes classiques de discrétisation spatiale, Décomposition Spectrale, Intégrales aux Frontières, Volumes Finis et Eléments Finis, laquelle des quatre est-elle la mieux adaptée aux équations de l'effet dynamo?

- Habituellement, les équations de la dynamo sont spatialement discrétisées par une méthode de type spectral [Léorat et al, 1980][Meneguzzi & Pouquet, 1989], éventuellement associée à une résolution par différences finies dans une dimension [Glatzmaier 1984, 1985, 1995] [Léorat, 1993, 1994]. La raison essentielle justifiant l'utilisation des méthodes spectrales (ou harmoniques sphériques) tient dans l'économie conséquente du temps cpu nécessaire à la résolution (de l'ordre de 10 à 100). Toutefois, ces méthodes performantes pour des géométries élémentaires (sphère, cylindre, cellule périodique) sont beaucoup moins adaptées à une géométrie complexe telle que celle du coeur de Phenix dans lequel par exemple la répartition des assemblages ferromagnétiques ne présente pas de symétrie.

- La méthode des Intégrales aux Frontières est habituellement recommandée pour décrire un phénomène linéaire. Or l'effet dynamo cinématique est un phénomène linéaire en  $\mathbf{B}$ . Cependant la présence des termes de vitesse en  $\text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ , dont a vu l'importance dans la source du phénomène, rend cette méthode moins intéressante. En effet, les Intégrales de Frontières nécessitent de connaître la solution de l'équation fondamentale adjointe à celle qu'on veut résoudre, solution qu'on ne connaîtra pas à cause de ces termes de transport. Un moyen de s'affranchir de cet inconvénient consisterait à traiter ces termes de façon itérative. Mais il devient alors nécessaire de mailler l'intérieur du domaine. En conséquence, l'aspect itératif de la méthode peut devenir, pour un écoulement quelconque, beaucoup plus coûteux en temps cpu.

- La discrétisation du domaine en Volumes Finis est, en général, bien adaptée aux problèmes de mécanique des fluides, traitant des flux de vecteur plutôt que les vecteurs eux-mêmes, lorsque la géométrie est simple. Dans le cas présent, la géométrie du domaine éventuellement complexe (c'est le cas du réacteur) rend cette méthode moins bien adaptée que celle des Eléments Finis.

- La méthode des Eléments Finis, plus difficile à mettre en oeuvre que les trois autres méthodes, est cependant bien adaptée aux géométries complexes. C'est cette méthode que nous avons choisie.

## II-1b. Minimisation d'une fonctionnelle

On peut montrer (théorème d'Euler) que résoudre une équation aux dérivées partielles par la méthode des Eléments Finis revient à minimiser une fonctionnelle. Dans les cas les plus simples, la fonctionnelle s'écrit comme la somme de l'énergie contenue dans le domaine plus celle échangée avec l'extérieur. En magnétostatique, par exemple, la fonctionnelle de coénergie s'écrit:

$$\mathcal{F} = \iiint_{(\Omega)} \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, d\Omega$$

En magnétohydrodynamique, l'expression de cette fonctionnelle est nettement plus complexe, les termes de transport compliquant singulièrement la chose.

Dans l'expression de cette fonctionnelle interviennent des intégrales de volume et des intégrales de surface. Pour calculer ces intégrales, l'espace est divisé en éléments. Ceux-ci peuvent être prismatique, quadratiques, tétraédriques ou pyramidaux (figure 3.12). Chaque élément contient un nombre fini de noeuds.

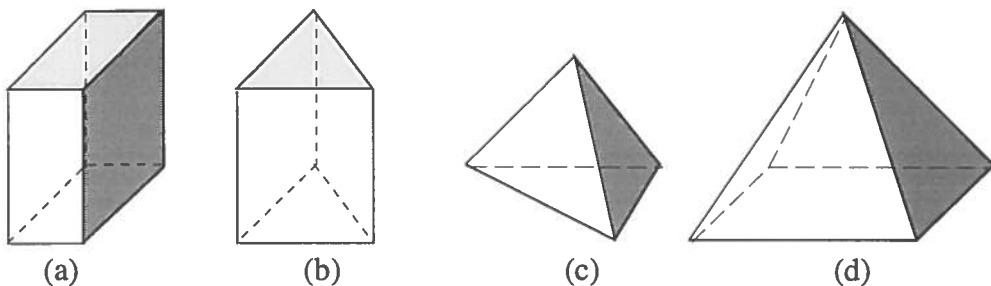


Fig. 3.12- Eléments: (a) quadratique, (b) prismatique, (c) tétraédrique, (d) pyramidal.

Bien que la théorie des Eléments Finis repose sur l'expression de la minimisation d'une fonctionnelle, sa programmation informatique utilise généralement une méthode projective équivalente. Nous avons utilisé la méthode de projection de Galerkin.

## II-1c. Méthode projective

La méthode de projection de Galerkin consiste à projeter:

- Les équations à résoudre sur un espace vectoriel de fonctions dont la dimension est égale au nombre de noeuds du domaine. Ces fonctions sont notées  $\alpha_i$  (fonctions test vectorielles) et  $\beta_i$  (fonctions test scalaires).
- L'inconnue à résoudre (scalaire ou vectorielle) sur un autre espace de fonctions de dimension égale au nombre de noeuds du domaine. Ces fonctions sont notées  $\alpha_j$  (fonctions d'interpolation vectorielles) et  $\beta_j$  (fonctions d'interpolation scalaires).

On définit l'espace des fonctions test scalaires  $\beta_i$  est défini de la manière suivante:

$$\begin{cases} \beta_i = 1 \text{ au noeud } i \\ \beta_i = 0 \text{ sur tous les autres noeuds du domaine } (\Omega) \end{cases}$$

l'ensemble des  $\beta_i$  formant une base de l'espace des fonctions définies sur  $(\Omega)$ .

On définit de même l'espace des fonctions test vectorielles  $\alpha_i$ , celui des fonctions d'interpolation scalaires  $\beta_j$  et celui des fonctions d'interpolation vectorielles  $\alpha_j$ .

Ainsi, lorsque le maillage en éléments finis du domaine géométrique est fait, toutes les fonctions test et d'interpolation, ne dépendant que des noeuds du maillage, peuvent être calculées aussitôt.

La résolution consiste ensuite à déterminer l'ensemble des coordonnées de l'inconnue dans l'espace vectoriel des fonctions d'interpolation.

## II-1d. Interpolation de l'inconnue

C'est sur la base des fonctions d'interpolation  $\beta_j$  et  $\alpha_j$  qu'est interpolée l'inconnue  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n(\Omega)} X_j \alpha_j + \sum_{j=1}^{n(\Omega)} X'_j \beta_j, \quad n(\Omega) \text{ étant le nombre de noeuds contenus dans } (\Omega).$$

L'objectif de la modélisation est donc de déterminer la valeurs des  $X_j$  et  $X'_j$ . Le choix du type de fonctions test et d'interpolation (polynômes de Lagrange, de Withney, ou autres fonctions) sera adapté aux inconnues à résoudre et à la géométrie considérée.

## II-1e. Fonctions d'interpolation de la géométrie curviligne

La géométrie du domaine ou des régions représentées est interpolée elle aussi par un ensemble de fonctions. Cette géométrie présentant des angles et des courbures, la famille des polynômes de Lagrange au second ordre convient bien.

## II-1f. Forme forte - Forme faible

La forme forte d'une modélisation est l'expression de la projection de l'équation à résoudre sur la base des fonctions test

La forme faible est l'expression de la projection de l'équation à résoudre sur la base des fonctions test après intégration par parties. C'est la forme faible qui est résolue par la méthode des Eléments Finis.

A partir des équations de Maxwell, deux formulations de l'effet dynamo ont été trouvées. L'une dérive directement de l'équation de l'induction et contient l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  comme inconnue principale. L'autre dérive de l'expression en potentiels. Son inconnue principale est le quadrivecteur  $(\mathbf{A}, W)$ , où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur et  $W$  défini à partir du potentiel électrique  $\phi$  par la relation:

$$\phi = \frac{\partial W}{\partial t}$$

## II-2. Le modèle en $\mathbf{B}$

### II-2a. Forme forte

La forme forte du modèle en  $\mathbf{B}$  est donnée par l'équation de l'induction à laquelle on rajoute l'expression  $\text{div}\mathbf{B} = 0$ :

$$\iiint_{(\Omega)} \alpha_i \left\{ \text{rot} \left[ \frac{1}{\sigma} \text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) \right] + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \right\} d\Omega = 0 \quad \text{et } \text{div}\mathbf{B} = 0.$$

Pour forcer  $\text{div}\mathbf{B}=0$ , on peut montrer qu'il suffit de rajouter dans la fonctionnelle le terme  $(\text{div}\mathbf{B})^2$ , affecté d'une pénalité non nulle.

Nous avons choisi cette pénalité égale à  $-1/\sigma\mu$ , de façon à obtenir, dans le système de résolution, une matrice de diffusion symétrique définie positive. Son effet est équivalent à introduire dans le membre de gauche le terme:

$$- \text{grad} \left( \frac{1}{\sigma\mu} \text{div}\mathbf{B} \right)$$

Par rapport à la seconde formulation en  $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$ , celle-ci est intéressante par le nombre de composante de l'inconnue principale (trois) d'une part, et par la précision obtenue sur la densité d'énergie  $\mathbf{B}^2/2\mu$  d'autre part, du même ordre de grandeur que celle sur l'inconnue principale  $\mathbf{B}$ . En revanche, cette formulation ne permet pas de gérer une distribution discontinue de perméabilité magnétique. En effet, le coefficient  $1/\mu$  adressé à  $\mathbf{B}$  dans le terme de diffusion, ne pourra pas être dérivé par rapport aux composantes de l'espace s'il est discontinu. En revanche,  $\sigma$  peut être discontinue en fonction des coordonnées de l'espace, comme nous le verrons dans la forme faible de l'équation.

### II-2b. Forme faible

Les termes de diffusion sont intégrés par parties et, grâce aux relations d'analyse vectorielle et à la formule de Stokes, la forme faible de l'équation précédente s'écrit:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(\Omega)} \left\{ \frac{1}{\sigma} \text{rot}(\alpha_i) \cdot \text{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{1}{\sigma\mu} \text{div}\alpha_i \text{div}\mathbf{B} + \alpha_i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\} d\Omega + \\ & \oint_{(\partial\Omega+\Gamma)} \left\{ \alpha_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) - \frac{1}{\sigma\mu} (\text{div}\mathbf{B}) \alpha_i \cdot \mathbf{n} \right\} dS = \iiint_{(\Omega)} \left\{ \text{rot}(\alpha_i) \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \right\} d\Omega \end{aligned}$$

Dans cette équation, les termes du haut correspondent à une matrice de résolution symétrique et bien conditionnée. Les termes de vitesse, rejetés au membre de droite seront l'objet d'un traitement itératif.

## II-3. Le modèle en (A, W) [Plunian & Massé, Eccomas96]

### II-3a. Forme forte

La forme forte du modèle en (A, W) est dérivée des équations de Maxwell auxquelles on a rajouté l'expression de la conservation de la densité de courant:  $\text{div} \mathbf{j} = 0$  et la condition de jauge de Coulomb. Elle s'écrit sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iiint_{(\Omega)} \alpha_i \left\{ \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} \right) - \sigma \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi + \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A} \right) \right\} d\Omega = 0 \\ \iiint_{(\Omega)} \beta_i \left\{ \text{div} \sigma \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi + \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A} \right) \right\} d\Omega = 0 \\ \text{avec } \text{div} \mathbf{A} = 0 \quad \text{et } \phi = \frac{\partial W}{\partial t} \end{array} \right.$$

Comme précédemment, pour forcer  $\text{div} \mathbf{A} = 0$ , on peut montrer qu'il suffit de rajouter dans la fonctionnelle le terme  $(\text{div} \mathbf{A})^2$ , affecté d'une pénalité non nulle.

Nous avons choisi cette pénalité égale à  $1/\mu$ , de façon à obtenir, dans le système de résolution, une matrice de diffusion symétrique définie positive. Son effet est équivalent à introduire dans le membre de gauche le terme:

$$- \text{grad} \left( \frac{1}{\mu} \text{div} \mathbf{A} \right).$$

Le fait de prendre la primitive temporelle du potentiel électrique W comme quatrième composante de l'inconnue principale, au lieu du potentiel électrique  $\phi$ , permet de rendre symétrique la matrice de dépendance temporelle.

Par rapport à la première formulation en **B**, celle-ci comporte une composante supplémentaire dans l'inconnue principale (quatre). D'autre part, il y a perte de précision sur le

calcul de la densité d'énergie  $\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}$  puisqu'on doit dériver les composantes de **A** pour obtenir celles de **B**. En revanche, cette formulation permet de gérer toute discontinuité de perméabilité magnétique en plus de celles concernant la conductivité électrique et le champ de vitesse. C'est ce critère de plus grande généralité dans le choix des propriétés électromagnétiques qui a décidé de la formulation en (A, W) pour la modélisation des équations de l'effet dynamo cinématique.



### II-3b. Forme faible

La forme faible du système précédent est obtenus en intégrant par partie les termes de diffusion. Grâce aux relations d'analyse vectorielle et à la formule de Stokes, la forme faible du système précédent s'écrit:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iint\limits_{(\Omega)} \left\{ \frac{1}{\mu} \text{rot} \alpha_i \cdot \text{rot} \mathbf{A} + \frac{1}{\mu} \text{div} \alpha_i \text{div} \mathbf{A} + \sigma \alpha_i \cdot \frac{\partial(\mathbf{A} + \text{grad} W)}{\partial t} \right\} d\Omega \\ - \frac{1}{\mu} \iint\limits_{(\partial\Omega)} \alpha_i \cdot \mathbf{n} \text{div} \mathbf{A} \, dS + \iint\limits_{(\partial\Omega)} \alpha_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \, dS = \iint\limits_{(\Omega)} \sigma \alpha_i \cdot (\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A}) \, d\Omega \\ \iint\limits_{(\Omega)} \sigma \text{grad}(\beta_i) \cdot \left( \frac{\partial(\mathbf{A} + \text{grad} W)}{\partial t} - \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A} \right) d\Omega + \iint\limits_{(\partial\Omega)} \beta_i \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \\ \text{avec } \mathbf{H} = \frac{\text{rot} \mathbf{A}}{\mu} \quad \text{et } \mathbf{j} = \sigma \left( - \frac{\partial(\mathbf{A} + \text{grad} W)}{\partial t} + \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A} \right) \end{array} \right.$$

Les termes d'intégrale de volume des membres de gauche correspondent à une matrice de résolution symétrique et bien conditionnée.

Les termes de transport, rejetés au membre de droite feront l'objet d'un traitement itératif au moment de la résolution.

L'analyse de préconditionnement des deux modèles précédents conduit donc à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est très creuse et dans le meilleur des cas symétrique définie positive ( $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ).

Il reste maintenant à fixer le choix des fonctions test  $\beta_i$  et  $\alpha_i$ , d'interpolation  $\beta_j$  et  $\alpha_j$ , ainsi que le choix des méthodes d'intégration.

## II-4. Intégration numérique

### II-4a. Choix des fonctions test $\beta_i$ et $\alpha_i$ et d'interpolation $\beta_j$ et $\alpha_j$

Il est indispensable de trouver une modélisation telle que l'on se rapproche de la solution réelle lorsque la taille des éléments de discrétisation de l'espace tend vers zéro. D'après le théorème de Max-Millgram, cela est possible si les fonctions  $\beta_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  et  $\alpha_j$  sont des fonctions polynomiales. Si de plus on cherche à modéliser une inconnue continue dont la dérivée normale est continue, alors le choix des polynômes de Lagrange s'impose, ainsi que celui d'éléments nodaux (noeuds sur les sommets de l'élément). C'est le cas pour les deux modélisations en  $\mathbf{B}$  et en  $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$  présentées précédemment.

Si on cherchait à modéliser une inconnue continue dont la dérivée tangentielle soit continue (ce serait le cas pour une modélisation en  $\mathbf{H}$ , par exemple), alors le choix des polynômes de Withney s'imposerait, avec des éléments d'arête (noeuds sur les arêtes des éléments). Une formulation en arête est en général mieux adaptée à la présence de champ forts dans une géométrie présentant de fortes discontinuités (coins, pointes, fissures, arêtes, ...).

### II-4b. Choix du degré des $\beta_j$ et $\alpha_j$ pour chaque composantes de l'inconnue

On peut choisir des fonctions d'interpolation  $\beta_j$  et  $\alpha_j$  différentes pour chaque composante de l'inconnue principale. Ainsi, dans le cas des équations de Navier-Stokes, il est judicieux de prendre pour les fonctions d'interpolation de pression des polynômes d'un degré supérieur à ceux des fonctions d'interpolation de la vitesse (termes homogènes à  $V^2$  et d'autre à  $P$ ).

Les deux formulations en  $\mathbf{B}$  et en  $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$  sont, elles, essentiellement elliptiques (exceptés les termes de transport qui sont paraboliques et rejetés au second membre). Il est donc judicieux de choisir des polynômes de Lagrange de même degré pour toutes les composantes.

### II-4c. Choix du degré des fonctions test $\beta_i$ et $\alpha_i$

Dans le but de conserver la symétrisation obtenue par l'analyse des deux formulations en  $\mathbf{B}$  et en  $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$ , il est judicieux de choisir des fonctions test de même degré que celle d'interpolation. Un avantage supplémentaire à ce choix est la signification physique de la fonctionnelle du système dont la minimisation devient probablement celle de l'énergie totale du système.

#### II-4d. Degré des polynômes de Lagrange

Dans le cas de la modélisation en  $(A, W)$ , le degré zéro (constant par morceau) n'est pas intéressant à cause de la perte totale d'information lorsqu'on calcule le rotationnel de  $A$ .

Le degré 2 est plus précis que le degré 1 dans le cas général, mais il peut donner lieu à des rebonds numériques de l'inconnue en cas de brusque variation de cette dernière. Les degrés 1 et 2 ont été programmés.

#### II-4e. Fonctions d'interpolation des géométries curvilignes

Pour des raisons de commodité de programmation, les fonctions d'interpolation des géométries curvilignes sont choisies égales à des polynômes de Lagrange de même degré que les fonctions test et d'interpolation de l'inconnue. Dans la formulation en  $(A, W)$ , les isoparamétriques de degré 1 et 2 ont été programmés. Les problèmes résolus sont donc soit du premier ordre, soit du second ordre (plus précis mais moins rapide)

#### II-4f. L'intégration numérique

Les propriétés pouvant n'être pas constantes au sein de chaque élément, et les éléments n'étant pas forcément rectilignes, on ne peut pas intégrer analytiquement les produits de polynômes de chaque intégrants (ceux correspondant à la formulation en  $(A, W)$  sont définis en annexe). Il est donc nécessaire de réaliser une intégration numérique de ces derniers. Pour la réaliser, la méthode de Gauss-Legendre est appliquée. Cette dernière permet en effet d'intégrer des variables non forcément continues d'un élément à l'autre, comme les dérivées des inconnues, ou les propriétés  $(\sigma, \mu, V)$ .

Chaque intégrant (annexe) est calculé numériquement, les propriétés étant données en un certain nombre de points à l'intérieur de chaque élément (figure 3.14). Pour la discrétisation de chaque élément, on a choisit des rectangles à 9 points d'intégration (cubes à 27 points) et triangles à 7 points (prismes à 21 points) d'intégration. Dans le cas d'une distribution des propriétés plus fine (vitesse par exemple), il est possible d'augmenter le nombre de points d'intégration par élément.

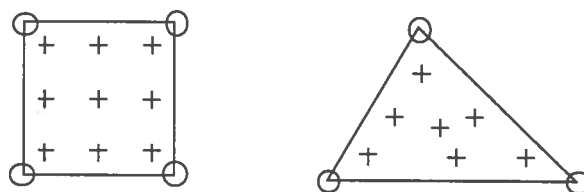


Fig. 3.13- Points d'affectation des propriétés (électromagnétiques, vitesse)

En résumé, quand la géométrie est donnée, toutes les fonctions test, d'interpolation de l'inconnue et d'interpolation curvilignes sont calculées. On peut donc ensuite calculer les intégrants. On peut ensuite résoudre le système linéaire dont la solution est donnée par l'expression des  $\mathbf{X}_j$  dans la décomposition de l'inconnue principale:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n(\Omega)} \mathbf{X}_j \alpha_j, \quad n(\Omega) \text{ étant le nombre de noeuds contenus dans } (\Omega).$$

## II-5. Résolution, stabilité et précision

### II-5a. Résolution

Dans les deux formulations précédentes, un schéma de discrétisation temporelle de type différences finies implicite est utilisée. Il en résulte une expression compacte du système linéaire à résoudre, de la forme suivante:

$$M \mathbf{X}^{n+1} + L \frac{\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^n}{\Delta t} = F(\mathbf{X}^{n+1})$$

où  $\mathbf{X}^{n+1}$  est l'inconnue principale calculée au temps  $(n+1)\Delta t$ ,  $M$  étant la matrice de diffusion,  $L$  la matrice de dépendance temporelle et  $F$  la fonction quadri-vectorielle, correspondant aux termes de transport. Ceux-ci sont traités de façon itérative. A l'itération  $i$ , le système précédent s'écrit:

$$(M \cdot \Delta t + L) \mathbf{X}_i^{n+1} = L \mathbf{X}^n + \Delta t F(\mathbf{X}_{i-1}^{n+1})$$

où  $\mathbf{X}^n = (A_x, A_x, A_x, W)$  au temps  $n\Delta t$ . Les valeurs obtenues sont de plus sous-relaxées.

Les matrices  $M$  et  $L$  étant symétriques et bien conditionnées, la résolution du système se fait par la méthode des gradients conjugués préconditionnée par une décomposition de Cholesky incomplète.

### II-5b. Stabilité

La discrétisation temporelle étant implicite, elle est donc inconditionnellement stable. Il n'y a donc aucune contrainte de stabilité sur le pas de temps.

Dans l'expression de termes de transport sur lesquels on itère, interviennent des dérivées spatiales au premier ordre pour les composantes de l'inconnue principale. Pour calculer ces dérivées, un schéma classique de type centré est utilisé. La raison de ce choix plutôt qu'un schéma de type décentré amont est de ne pas ajouter d'atténuation numérique aux instabilités physiques que l'on cherche à mettre en évidence. Le schéma centré impose la contrainte suivante qui doit être respectée dans chaque élément du domaine (Annexe 3C):

$$(R_m)_{\text{élément}} < 2.$$

## II-5c. Précision

De façon à tenir compte des phénomènes de diffusion et de convection présents dans l'effet dynamo, le pas de temps  $\Delta t$  est pris inférieur à leurs temps caractéristiques respectifs.

$$\begin{cases} \Delta t \leq \sigma\mu(\Delta x)^2 \\ \Delta t \leq \frac{\Delta x}{V} \end{cases}$$

Enfin, la taille des éléments doit être suffisamment petite pour éviter des rebonds numériques parasites. Une manière de les éviter peut être aussi de résoudre le système en éléments isoparamétriques de degré 1 au lieu de 2.

## II-6. Conclusion

Des deux formulations décrites dans cette partie, le choix de développer celle en  $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$  plutôt que celle en  $\mathbf{B}$  a été motivé principalement par un souci de plus grande généralisation en ayant la possibilité de modéliser un domaine dont la distribution de perméabilité magnétique ne soit pas forcément constante. Cela permet de traiter les cas de dynamos aux propriétés électromagnétiques non homogènes. En particulier, parmi les tests réalisés et présentés dans la suite, cette liberté a permis de modéliser des dynamos excitables à faible nombre de Reynolds magnétique. Elle a aussi prouvé son avantage dans le cas de la modélisation d'assemblage à enveloppe ferritique.

Toutefois, il serait intéressant de développer la formulation en  $\mathbf{B}$ , et de comparer les résultats obtenus avec celle en  $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$ . Cela permettrait de disposer d'un modèle supplémentaire pour traiter des cas de perméabilité homogène, plus rapide et plus précis. En particulier, une évaluation du gain en précision et en temps de calcul serait intéressant.

La formulation  $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$  a été programmée avec le logiciel Flux-Expert<sup>1</sup> [Massé, 1984].

---

<sup>1</sup> Outil d'aide à la programmation par les Eléments Finis permettant de décrire tout système d'équations aux dérivées partielles. Flux-Expert est commercialisé par la société DT2I- 8 chemin des prèles- 38240 Meylan-France

### III- Validation

Dans la mesure du possible, les différents termes du système (3.1) ont été testés indépendamment les uns des autres (Tableau 3.1).

Ainsi, les quatre premiers tests présentés permettent de comparer les résultats obtenus aux prédictions de la théorie électromagnétique, tandis que les deux derniers illustrent deux géométries d'écoulements dynamos classiques: l'écoulement de Ponomarenko [Ponomarenko 1973] et celui correspondant à l'expérience menée à Riga [Gailitis 1988].

	Phénomènes	Termes testés	Inconnue	Dimension du domaine
Fil3D	Diffusion	$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A})$	$(0, 0, A_z, 0)$	3
Fil3Dt	Diffusion instationnaire	$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A}); -\sigma\partial\mathbf{A}/\partial t$	$(0, 0, A_z, 0)$	3
Tore3Dt	Diffusion instationnaire	$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A}); -\sigma\partial\mathbf{A}/\partial t;$ $-\sigma\text{grad}(\partial W/\partial t)$	$(0, 0, A_z, W)$	3
Parker2D	Diffusion et Convection sans Effet Dynamo	$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A}); -\sigma\partial\mathbf{A}/\partial t;$ $\sigma\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{A}$	$(0, 0, A_z, 0)$	2
Ponomarenko	Diffusion et Convection avec Effet Dynamo	$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A}); -\sigma\partial\mathbf{A}/\partial t;$ $-\sigma\text{grad}(\partial W/\partial t); \sigma\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{A}$	$(A_x, A_y, A_z, W)$	3
Gailitis	Diffusion et Convection avec Effet Dynamo	$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A}); -\sigma\partial\mathbf{A}/\partial t;$ $-\sigma\text{grad}(\partial W/\partial t); \sigma\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{A}$	$(A_x, A_y, A_z, W)$	3

Tab. 3.1- Tests de validation de la programmation du système (3.1).

### III-1. Fil parcouru par un courant continu (Fil3D) ou alternatif (Fil3Dt).

#### III-1a. Description du problème

Considérons un fil conducteur, dans un milieu isolant, dirigé selon l'axe Oz et parcouru par un courant  $j_z$  continu ou alternatif (figure 3.14). Il génère alors dans l'air un champ magnétique  $B_\theta$ , azimutal, de la forme (théorème d'Ampère):

$$\begin{cases} r < R_{\text{fil}} : & B_\theta = \frac{\mu r}{2} j_z(t) \\ r > R_{\text{fil}} : & B_\theta = \frac{\mu R_{\text{fil}}^2 j_z(t)}{2r} \end{cases}$$

Le potentiel vecteur correspondant, si l'on suppose qu'il s'annule sur la frontière extérieure, est dirigé selon l'axe Oz et a pour valeur:

$$\begin{cases} r < R_{\text{fil}} : & A_z = \frac{\mu j_z(t)}{4} (R_{\text{fil}}^2 - r^2) - \frac{\mu j_z(t) R_{\text{fil}}^2}{2} \ln\left(\frac{R_{\text{fil}}}{R_D}\right) \\ r > R_{\text{fil}} : & A_z = -\frac{\mu j_z(t) R_{\text{fil}}^2}{2} \ln\left(\frac{r}{R_D}\right) \end{cases}$$

Lorsque  $j_z$  est alternatif, alors  $A_z$  est en phase avec  $j_z$ .

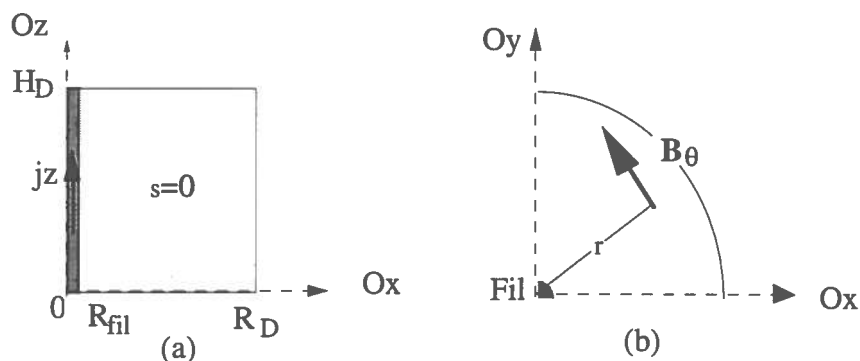


Fig. 3.14- Fil parcouru par un courant vertical: (a) Section verticale (b) Section horizontale



### III-1b. Modélisation par les éléments finis

- Le domaine ( $\Omega$ ) 3D est composé d'un fil cylindrique de rayon  $R_{\text{fil}}$ , entouré d'une région cylindrique extérieure de rayon  $R_D$ .
- La perméabilité est homogène dans tout le domaine ( $\Omega$ ) et égale à  $\mu_0$ .
- La conductivité du fil vaut  $\sigma_{\text{fil}}$ , celle du domaine extérieur vaut  $\sigma_{\text{ext}} = 0$  (milieu isolant).
- L'inconnue est  $(0, 0, A_z, 0)$ .
- Une densité de courant  $j_z$  est distribuée en chaque point du fil.
- Conditions Aux Limites:
  - Dirichlet homogène sur la frontière latérale:  $A_z = 0$ .
  - Neuman homogène sur les frontières inférieures et supérieures:  $\partial A_z / \partial z = 0$
- Conditions initiales:  $A_z = 0$
- Les paramètres retenus pour la simulation numérique sont décrits dans le tableau suivant:

$R_{\text{fil}}$ (m)	$R_D$ (m)	$\sigma_{\text{fil}}$ ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	$\sigma_{\text{ext}}$ ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	$\mu$ ( $\text{H m}^{-1}$ )	$H_D$ (m)	$\Delta t$ (s)	$(j_z)_{\text{source}}$ ( $\text{A m}^{-1}$ )
0.01	1	$10^6$	0	$4\pi 10^{-7}$	0.01	0.5	DC: $10^6$ AC: $10^6 \sin(\pi t/4)$

Tab. 3.2- Paramètres retenus pour la simulation numérique de Fil3D et Fil3Dt

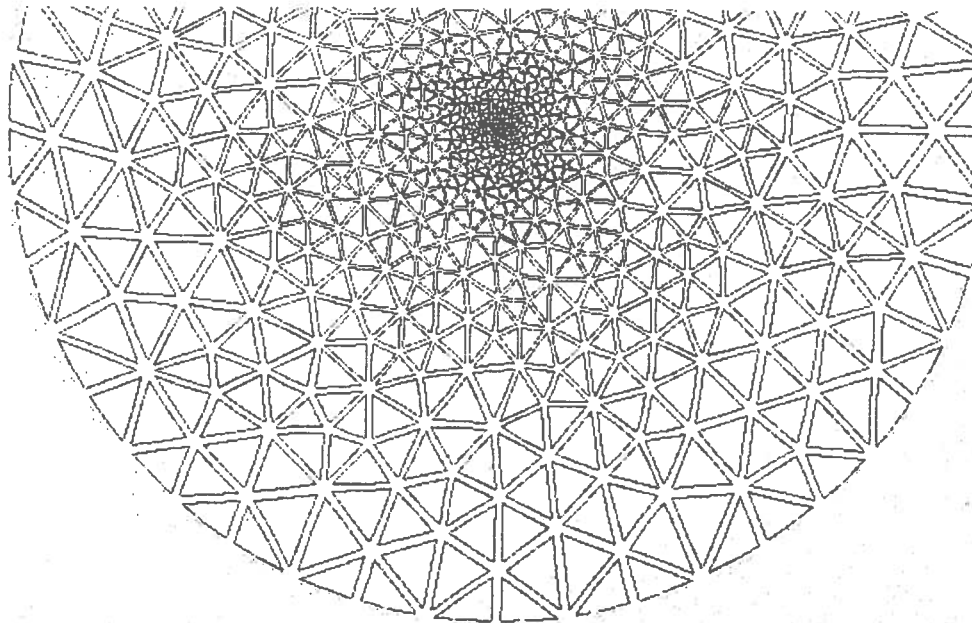


Fig. 3.15- Maillage de Fil3D et Fil3Dt.

### III-1c. Résultats

Les isovaleurs de  $A_z$  ont été tracées pour les cas stationnaire et transitoire. Elles représentent les lignes de champ magnétique. Les résultats numériques sont en très bon accord avec la théorie (figure 3.16). Pour un maillage tel que celui représenté à la figure 3.15, la différence est inférieure à 5%. L'évolution temporelle de  $A_z$  dans le cas de fil3Dt est phase avec le courant d'excitation dans le fil.

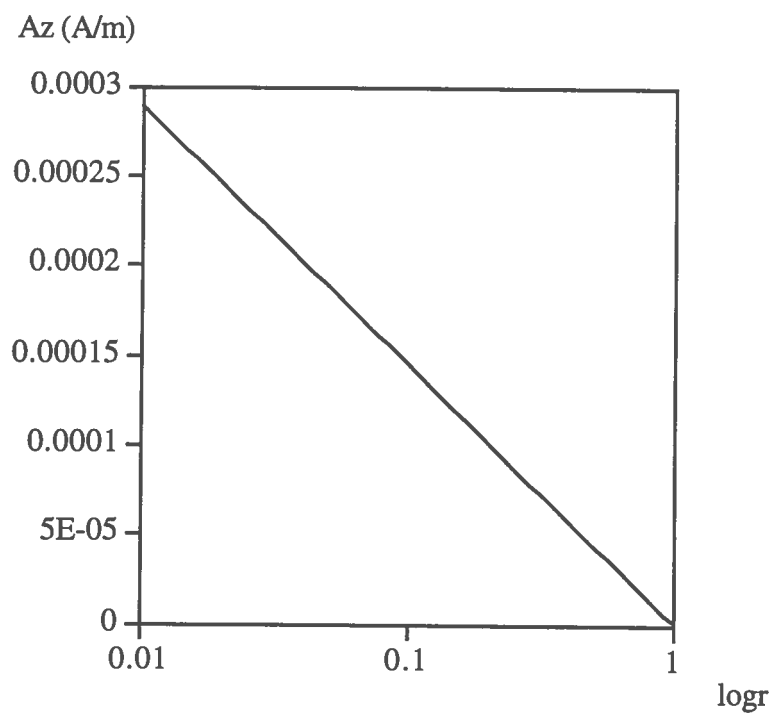


Fig. 3.16- Fil3Dt:  $A_z$  en fonction de  $r$  pour un temps fixé fixé.

### III-2. Diffusion instationnaire d'un champ magnétique (Tore3D).

Par rapport au problème précédent, on a ajouté un tore conducteur, de hauteur finie, autour du fil.

A un instant donné, une densité de courant  $\mathbf{j}_z$  est appliquée en chaque point du fil (figure 3.17). On s'intéresse au comportement transitoire des courants de Foucault induits dans le tore.

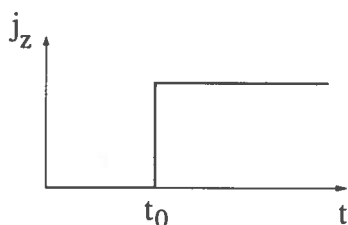


Fig. 3.17- Profil en escalier de la densité de courant imposée dans le fil

#### III-2a. Description du problème

Considérons un fil conducteur, dans l'air, dirigé selon l'axe Oz. Autour de ce fil est enroulé un tore conducteur.

- L'état final au bout d'un temps infini est identique à celui décrit dans fil3D.
- L'état transitoire, juste après avoir forcé  $\mathbf{j}_z$  dans le fil est caractérisé par la création de courants de Foucault ( $-\sigma \partial A / \partial t$ ) dans le tore, opposés à  $\mathbf{j}_z$ . Ces courants se referment dans le tore du fait de la présence de gradients de potentiels ( $-\sigma \text{grad}(\partial W / \partial t)$ ) entre ses deux surfaces supérieures et inférieures. Il y a donc création d'une boucle de champ magnétique azimuthal et d'un potentiel vecteur axial  $A_z$  opposés à ceux induit directement par le fil (loi de Lenz<sup>1</sup>)

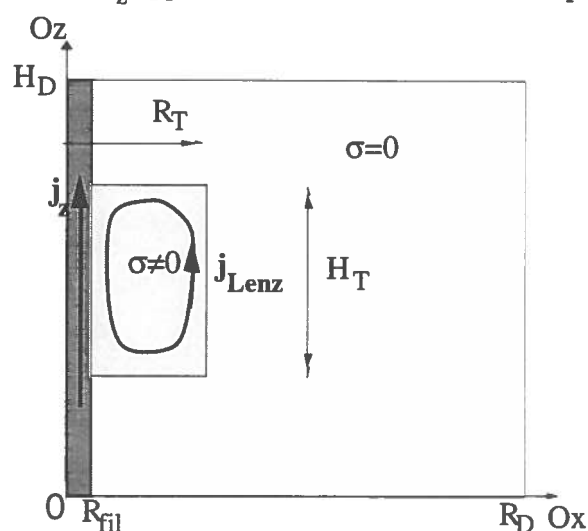


Fig. 3.18- Etat transitoire pendant lequel un courant induit s'oppose à celui qui lui a donné naissance.

<sup>1</sup> La f.e.m. induite par un changement de flux a une polarité telle que le courant créé donne naissance à un flux propre qui s'oppose à la variation du flux inducteur.

### III-2b. Modélisation par les éléments finis

- Le domaine ( $\Omega$ ) 3D est composé d'un fil cylindrique de rayon  $R_{\text{fil}}$ , entouré d'une région cylindrique extérieure de rayon  $R_D$ , d'un tore de rayon  $R_T$  et de hauteur  $H_T$ .
- La perméabilité est homogène dans tout le domaine ( $\Omega$ ) et égale à  $\mu_0$ .
- La conductivité du fil vaut  $\sigma_{\text{fil}}$ , celle du domaine extérieur vaut  $\sigma_{\text{ext}} = 0$  (conductivité de l'air), celle du tore vaut  $\sigma_T$ .
- L'inconnue est  $(0, 0, A_z, W)$  dans le tore et  $(0, 0, A_z, 0)$  à l'extérieur.
- Une densité de courant  $j_z$  est distribuée en chaque point du fil.
- Conditions Aux Limites:
  - Dirichlet homogène sur la frontière latérale:  $A_z = 0$ .
  - Neuman homogène sur les frontières inférieures et supérieures:  $\partial A_z / \partial z = 0$
  - Neuman homogène sur les frontières du tore:  $\partial W / \partial n = 0$
- Conditions initiales:  $A_z = W = 0$
- Les paramètres retenus pour la simulation numérique sont décrits dans le tableau suivant<sup>2</sup> :

$R_{\text{fil}}$ (m)	$R_T$ (m)	$R_D$ (m)	$\sigma_{\text{fil}}$ ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	$\sigma_{\text{tore}}$ ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	$\sigma_{\text{ext}}$ ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	$\mu$ ( $\text{H m}^{-1}$ )	$H_T$ (m)	$H_D$ (m)	$\Delta t$ (s)	$(j_z)_{\text{source}}$ ( $\text{A m}^{-2}$ )
0.01	0.1	1	$10^6$	$10^6$	0	$4\pi 10^{-7}$	0.2	0.6	0.005	DC: $10^6$

Tab. 3.3- Paramètres retenus pour la simulation numérique de Tore3D.

Le maillage est du même degré de précision que fil3D, avec 15 éléments verticaux.

### III-2c. Résultats

La densité de courant induite dans le tore pendant les premier pas de temps est conforme à celle attendue (non représenté).

<sup>2</sup> Le temps caractéristique du courant induit est de l'ordre de  $10^{-2}$  s ( $\sigma_{\text{tore}} \mu R_T^2$ )

### III-3 Problème de R.L.Parker (PARKER2D)

#### III-3a. Description du problème

Considérons un milieu homogène, de conductivité et de perméabilité non nulles, composé d'un disque de rayon  $R$  entouré d'un milieu extérieur. Un champ magnétique initial, homogène baigne tout le domaine.

A l'instant  $t=0$ , on applique au disque un mouvement de rotation en bloc, avec une accélération constante au cours du temps. Du fait de la différence de rotation entre le disque et l'extérieur, les lignes de champ magnétique sont alors déformées puis expulsées au voisinage de la frontière du disque (rotation différentielle).

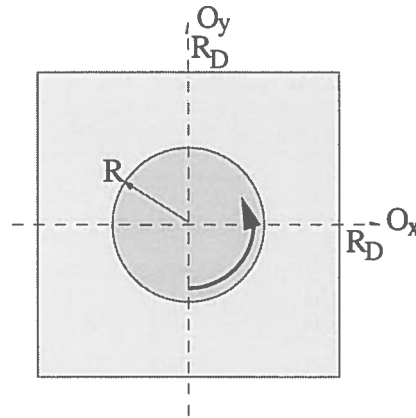


Fig. 3.19- Disque conducteur en rotation autour de  $O_z$

Ce problème a été résolu de façon analytique par R.L. Parker (1966). Il a montré que pour un nombre de Reynolds magnétique de 100 ( $Rm = \sigma \mu R^2 \omega$ ), des boucles de champ magnétique dues à la diffusion apparaissent pendant les quinze premières révolutions du disque. Ensuite, le système atteint un régime stable et permanent, avec la majeure partie des lignes de champ expulsées autour du cylindre. Un problème analogue a été résolu par N.O. Weiss en 1966.

#### III-3b. Modélisation par les éléments finis

- Le domaine ( $\Omega$ ) 2D est composé d'un disque de rayon  $R$ , entouré d'une région extérieure carrée de demi-côté  $R_D$ .
- La perméabilité est homogène dans tout le domaine ( $\Omega$ ) et égale à  $\mu_0$ .
- La conductivité est homogène dans tout le domaine ( $\Omega$ ) et égale à  $\mu_0$ .

- L'inconnue est  $(0, 0, A_z, 0)$ .

- Conditions Aux Limites:

Neuman homogène sur les frontières extérieures de  $(\Omega)$ :  $\partial A_z / \partial n = 0$ .

- Conditions initiales:  $A_z = B_0 y$

- Le champ de vitesse azimuthal est de la forme:

$$\begin{cases} t < t_0: V_\theta = Rkt \\ t > t_0: V_\theta = R\omega_{\max} \text{ avec } \omega_{\max} = kt_0 \end{cases}$$

- Les paramètres retenus pour la simulation numérique sont décrits dans le tableau suivant:

	R (m)	R <sub>D</sub> (m)	$\sigma$ ( $\Omega^{-1}m^{-1}$ )	$\mu$ ( $H m^{-1}$ )	k ( $rad s^{-2}$ )	$\omega_{\max}$ ( $rad s^{-1}$ )	t <sub>0</sub> (s)	$\Delta t$ (s)
Essai 1	1	4	10 <sup>6</sup>	4 $\pi$ 10 <sup>-7</sup>	201.57	k 30 $\Delta t$	30 $\Delta t$	0.00658
Essai 2	1	4	10 <sup>6</sup>	4 $\pi$ 10 <sup>-7</sup>	201.57	k 100 $\Delta t$	100 $\Delta t$	0.00658

Tab. 3.4- Paramètres retenus pour la simulation numérique de Parker2D

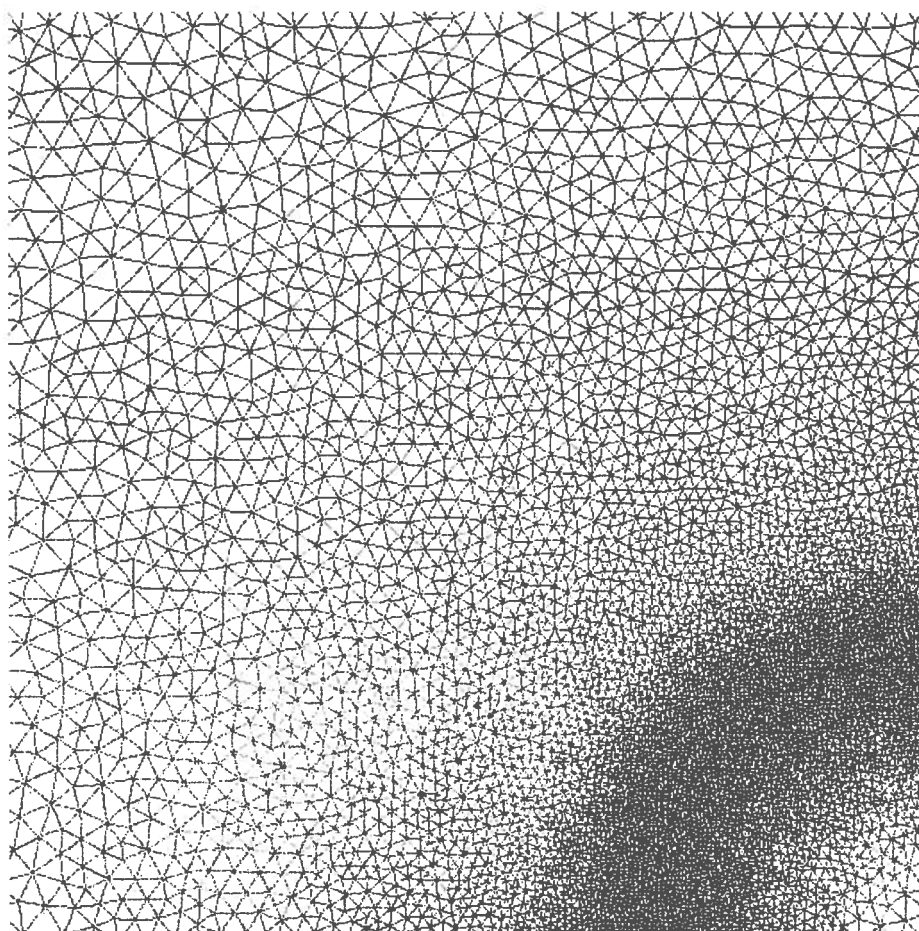


Fig. 3.20- Maillage de PARKER2D (Nombre d'éléments: 50054, de noeuds: 99829, degrés de liberté: 99829).

### III-4. Ecoulement de Ponomarenko (PONOMARENKO3D)

#### III-4a. Description du problème

L'écoulement de Ponomarenko, du nom de celui qui a mis en évidence la propension de cet écoulement à générer de l'effet dynamo [Ponomarenko Yu., 1973], est défini par un écoulement hélicoïdal dans un cylindre infini, entouré latéralement d'une région immobile (figure 3.22).

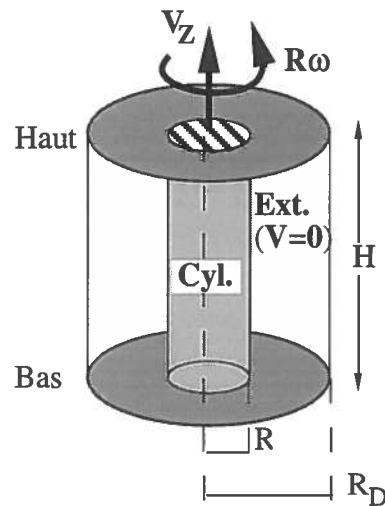


Fig. 3.22- Ecoulement hélicoïdal dans le cylindre intérieur

Cet écoulement a été l'objet de nombreuses études analytiques (partie 1, section II-4a.). En particulier, lorsqu'on fait varier les propriétés électromagnétiques du cylindre intérieur par rapport à l'extérieur, le  $R_m$  critique peut atteindre une valeur encore plus faible que dans le cas homogène. Dans le cas où les rapports de conductivité et de perméabilité extérieur sur intérieur sont égaux à 10, le  $R_m$  critique est inférieur à 5 [Marty et al, 1989].

La méthode des éléments finis permet de traiter en théorie les deux problèmes écoulement en bloc et écoulement de Couette-Poiseuille, la principale contrainte de stabilité étant donnée par le nombre de Reynolds de maille. Cette dernière oblige donc à rechercher un cas offrant un faible  $R_m$  critique (vitesse plus faible donc mailles autorisées plus grosses) pour une petite longueur d'onde magnétique axiale excitée (hauteur du domaine plus faible donc moins de mailles).

Le cas le plus favorable est donné par un domaine extérieur 10 fois plus perméable et conducteur que le cylindre intérieur, pour un facteur d'hélicité  $\chi$  égal à 0.8 .

### III-4b. Résultats antérieurs [Marty et al, 1993]

L'écoulement dans le cylindre est défini en coordonnées cylindriques par:

$$(3.2) \quad (V_r, V_\theta, V_z) = (0, \omega r, V_0)$$

$\omega$  étant la vitesse angulaire ( $\text{rad.s}^{-1}$ ), et  $V_0$  étant la vitesse axiale ( $\text{m.s}^{-1}$ ).

Le paramètre de vissage de l'écoulement  $\chi$  et le nombre de Reynolds magnétique sont définis par:

$$(3.3) \quad \chi = \frac{V_0}{R\omega} \quad \text{et} \quad R_m = \sigma_{\text{cyl}} \mu_{\text{cyl}} R^2 \omega \sqrt{1 + \chi^2}$$

Une approche analytique classique du problème décrit par l'équation de l'induction consiste à calculer l'évolution d'une instabilité magnétique de la forme:

$$\mathbf{b} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{b}(r) \exp(pt + im\theta + ikz)$$

En remplaçant  $\mathbf{b}$  dans l'équation de l'induction, on détermine deux systèmes d'équations vérifiées par les composantes de  $\mathbf{b}$ , à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. On en déduit une solution générale de  $\mathbf{b}$  à l'intérieur et une autre à l'extérieur. En écrivant ensuite les relations de continuité vérifiées par  $\mathbf{b}$  à la frontière du cylindre, on en déduit une équation (complexe) de la forme:

$$F(k, m, \chi, \omega, \sigma_{\text{cyl}}/\sigma_{\text{ext}}, \mu_{\text{cyl}}/\mu_{\text{ext}}, \text{Re}(p) \text{ et } \text{Im}(p)) = 0.$$

Supposons que les paramètres  $\chi$ ,  $\sigma_{\text{cyl}}/\sigma_{\text{ext}}$ ,  $\mu_{\text{cyl}}/\mu_{\text{ext}}$  soit fixés, et intéressons-nous au cas où  $\text{Re}(p)$  est égale à zéro, de façon à se placer juste à la frontière entre l'état où l'instabilité croit et celui où elle décroît (neutralité). Alors, pour chaque mode azimutal  $m$  donné, on peut tracer la courbe de neutralité donnant par exemple le nombre de Reynolds magnétique neutre en fonction de  $k$  (figure 3.23 )

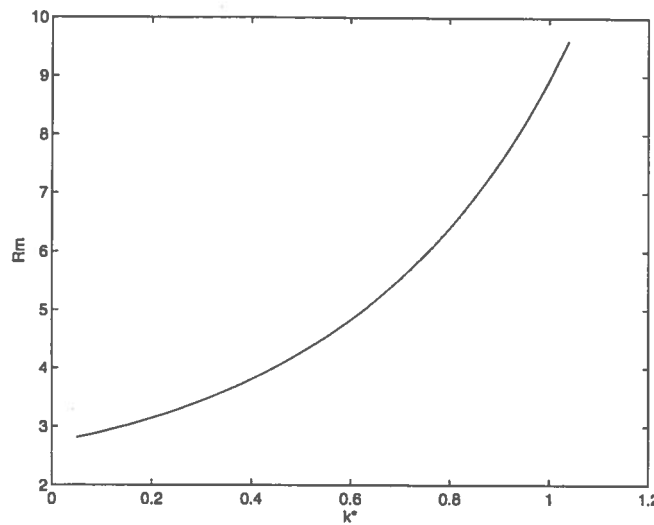


Fig. 3.23- Courbe  $R_m = f(k^*)$  étant donnés:  $\chi = 0.8$ ,  $\sigma_{\text{cyl}}/\sigma_{\text{ext}} = 0.1$  et  $\mu_{\text{cyl}}/\mu_{\text{ext}} = 0.1$ ,  $m=1$ .

Pour  $k^* = 2\pi R/H = 0.628$ , on trouve  $R_m^c = 5$ .



### III-4c. Modélisation par éléments finis

- Le domaine ( $\Omega$ ) 3D est composé d'un cylindre de rayon  $R$ , entouré d'une région extérieure cylindrique de rayon  $R_D$  (figure 3.22).

- Le champ de vitesse dans le cylindre intérieur, le facteur hélicitaire ainsi que le nombre de Reynolds magnétique sont définis par les relations (3.2) et (3.3).

- La hauteur  $H$  du domaine correspondant à deux périodes de rotation du champ de vitesse vérifie la relation:
 
$$H = 4\pi R\chi.$$

- La perméabilité n'est pas forcément homogène dans tout le domaine ( $\mu_{\text{cyl}}/\mu_{\text{ext}}$ ).

- La conductivité n'est pas forcément homogène dans tout le domaine ( $\sigma_{\text{cyl}}/\sigma_{\text{ext}}$ ).

- L'inconnue est  $(A_x, A_y, A_z, W)$ .

- Conditions Aux Limites:

- Sur les frontières bas et haut, deux types de CAL ont été testées:

- 1- Périodiques  $(A_x, A_y, A_z, W)(z=0) = (A_x, A_y, A_z, W)(z=H)$ ,  $H$  correspondant à deux périodes de rotation du champ de vitesse.

- 2- Anticycliques  $(A_x, A_y, A_z, W)(z=0) = -(A_x, A_y, A_z, W)(z=H)$ ,  $H$  correspondant à une période de rotation du champ de vitesse.

- Sur la frontière latérale extérieure, deux types de CAL ont été testées:

- 1- Neuman:  $\partial(A_x, A_y, A_z, W)/\partial\mathbf{n} = 0$

- 2- Dirichlet homogène  $(A_x, A_y, A_z, W) = (0, 0, 0, 0)$ .

- Conditions initiales:

Elles représentent un champ magnétique déjà organisé, proche d'un mode propre. On gagne ainsi en temps de calcul, de l'ordre du temps de diffusion de  $\mathbf{B}$ . Elles expriment un champ magnétique uniforme dans le plan, de direction horizontale périodique en  $z$  (figure 3.24):

$$\begin{cases} A_x = -\frac{HB_0}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi z}{H}\right) \\ A_y = -\frac{HB_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi z}{H}\right) \\ A_z = W = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où les conditions aux limites sur la frontière latérale extérieure sont de type Dirichlet homogène, l'expression précédente est multipliée par le facteur  $\cos^2(\pi r/2R_D)$ . Les conditions initiales ne vérifient alors pas  $\text{div} \mathbf{A} = 0$ . Il s'ensuit un rajustement de la solution au cours des premier pas de temps

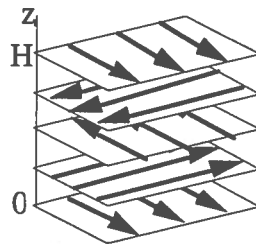


Fig. 3.24- Conditions initiales schématiques pour la simulation de Ponomarenko

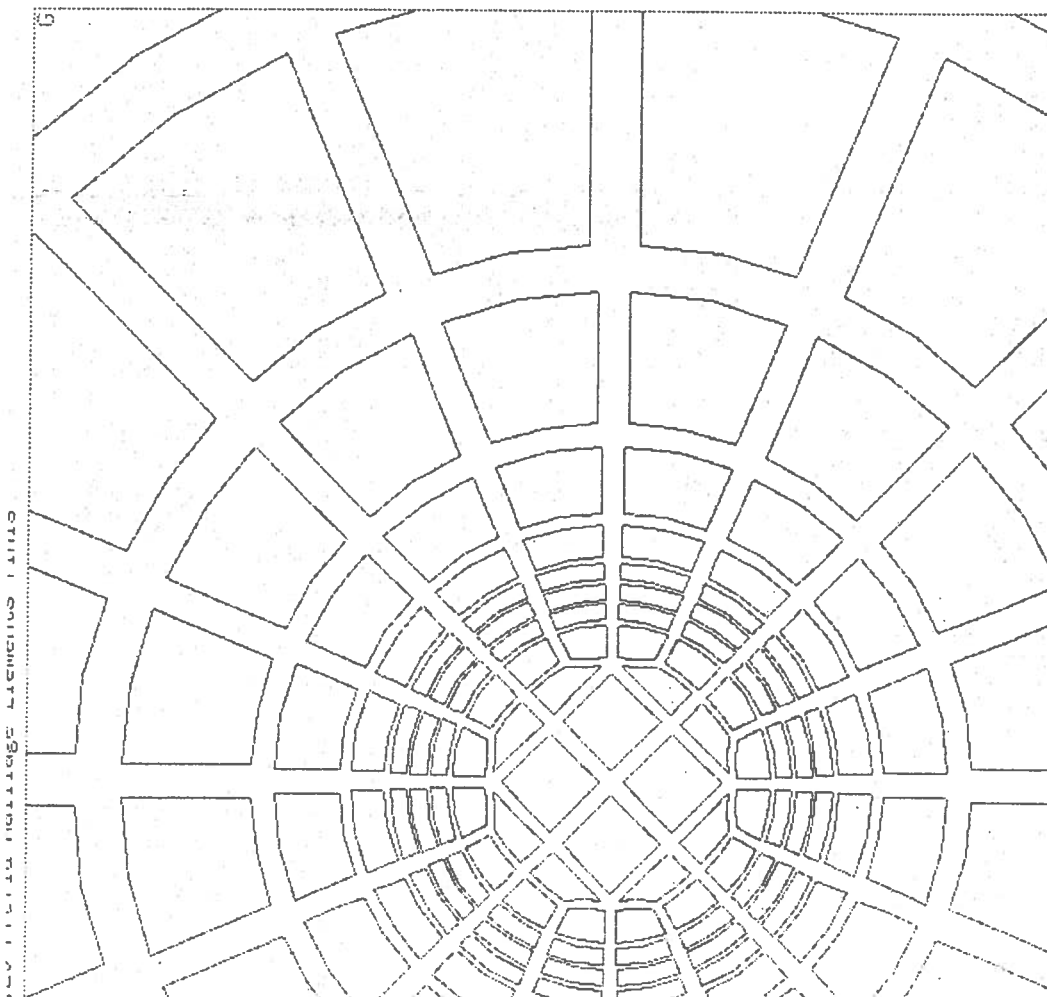


Fig. 3.25- Maillage horizontal de PONOMARENKO3D dans le cas où  $R_D/R = 16$ ,  $H=10\text{m}$ ,  $\chi=0.8$  et  $R_m=7$   
(Nombre d'éléments: 3944, de noeuds: 28577, de degrés de liberté: 114308)

### III-4d. Résultats

• *Vérification du  $R_m$  critique:*

Pour les valeurs de  $\chi$ ,  $\sigma_{cyl}/\sigma_{ext}$  et  $\mu_{cyl}/\mu_{ext}$  correspondant à la figure 3.26, et pour  $k^*=0.0628$ , des simulations numériques par les éléments finis ont été faites de part et d'autre du  $R_m$  critique ( $R_m^c = 5$ ). A chaque fois l'évolution temporelle de l'énergie magnétique est tracée, pendant une durée correspondant à 6 périodes de rotation. On observe l'accord parfait avec la prédiction analytique (figures 3.26 et 3.27). La simulation à  $R_m = 5$  et  $k=0,628$  a été réalisée. La valeur de l'énergie est alors constante au cours du temps, conformément à la prédiction analytique.

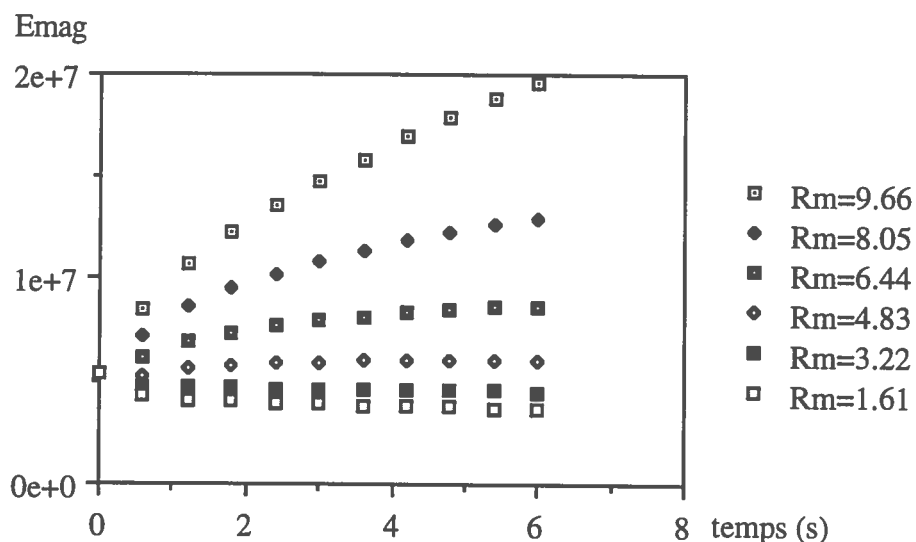


Fig. 3.26- L'énergie magnétique tracée en fonction du temps pour différents  $R_m$ . Pour  $R_m > 5$ , le taux de croissance positif témoigne d'un effet dynamo. Le temps de diffusion dans le cylindre est de l'ordre de la seconde ( $\sigma\mu R^2$ ).

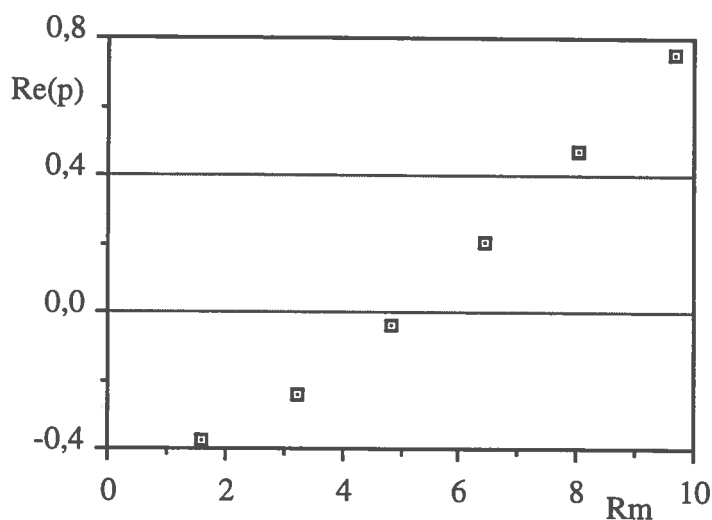


Fig. 3.27- Pour  $k^* = 0.628$ , une évaluation du taux d'accroissement tracée en fonction de  $R_m$  donne une valeur critique d'apparition d'effet dynamo:  $R_m^c = 5$ .

• *Allure géométrique du champ magnétique*

L'induction magnétique est représentée à la figure 3.28. Les lignes de champ de plus grande intensité sont enroulées sur le bord du cylindre, à l'extérieur, selon deux hélices enchevêtrées (figure 3.29). La composante verticale de l'induction magnétique est positive dans l'une et négative dans l'autre.

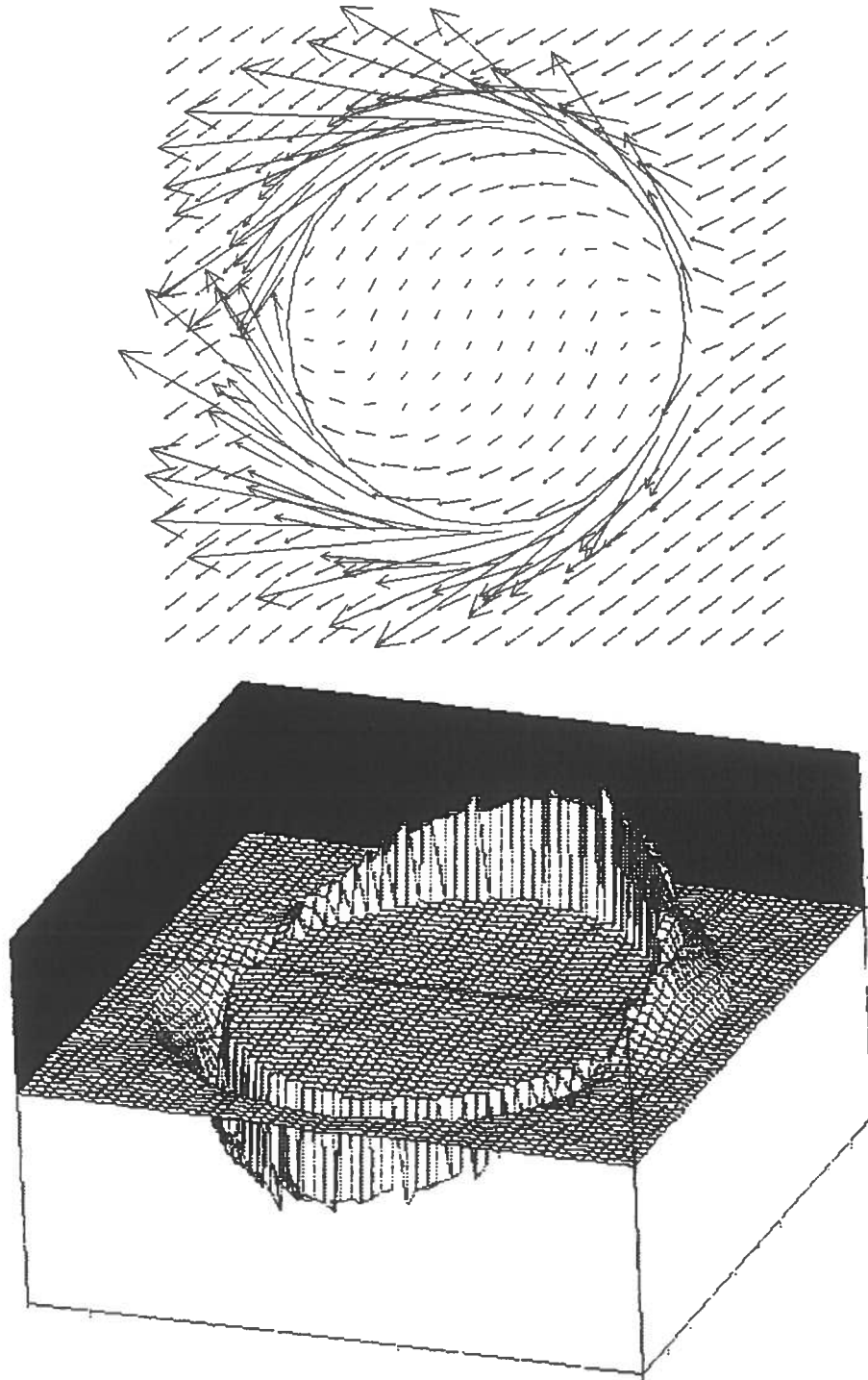


Fig. 3.28- Dans une section droite horizontale: (en haut) Vecteur  $(B_x, B_y)$ ; (en bas) Isovaleurs de  $B_z$ .  
On retrouve la prépondérance du mode  $m=1$ .

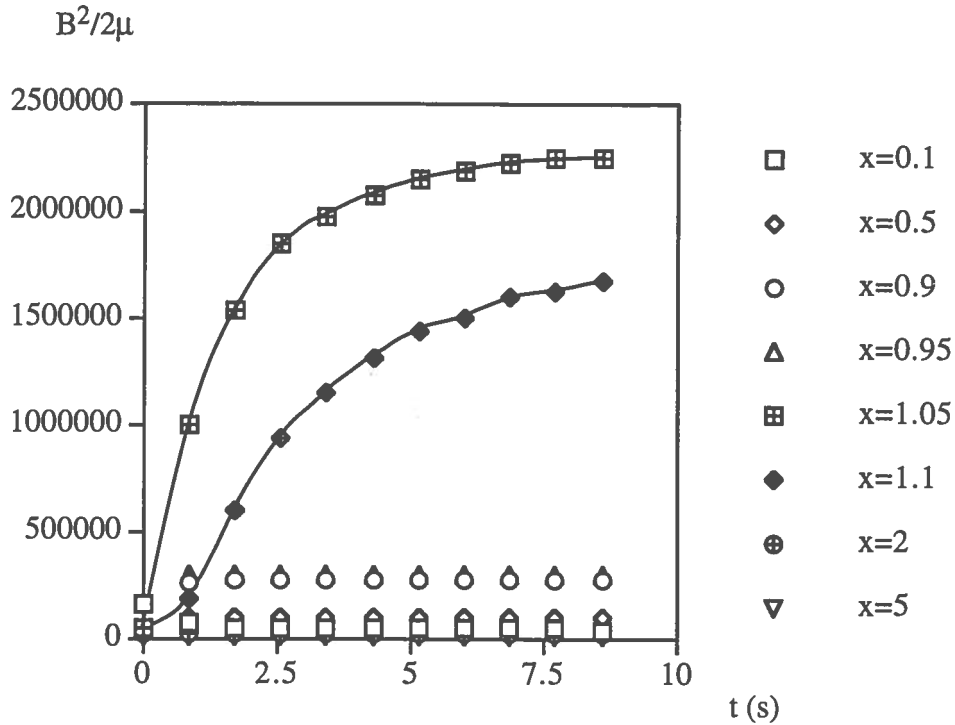


Fig. 3.31- Densité d'énergie magnétique en fonction de  $x$ , avec  $y=0$  et  $z=5m$  (Rayon du cylindre  $R=1m$ ). Seules les courbes croissantes sont interpolées.

On constate que:

- La croissance temporelle de  $B^2/2\mu$  n'est pas homogène dans le domaine.
- Elle n'est pas de nature pulsatoire.

L'aspect des courbes évoque une transition pendant laquelle le champ magnétique s'organise dans le domaine ( $\Omega$ ). La durée du calcul correspondant à 6 périodes de rotation du cylindre intérieur n'est peut-être pas suffisante. Un calcul plus long serait nécessaire pour valider de façon plus définitive le modèle.

Une deuxième manière de procéder pourrait consister à prendre les valeurs issues de l'étude analytique comme conditions initiales.

Ce travail reste à faire.

### III-4e. Tests numériques

La géométrie simple de l'écoulement de Ponomarenko a permis de faire varier de nombreux paramètres du problème et d'examiner leur influence, afin d'en dégager des critères de validité du code applicable à d'autres géométries. En particulier, des valeurs différentes de  $R_D/R$ ,  $\mu_{cyl}/\mu_{ext}$ ,  $\sigma_{cyl}/\sigma_{ext}$ ,  $R_m$ , des CI, des CAL et des précisions du maillage différentes ont été testées. Ces différents essais sont résumés sur la figure 3.32 et dans le tableau 3.6.

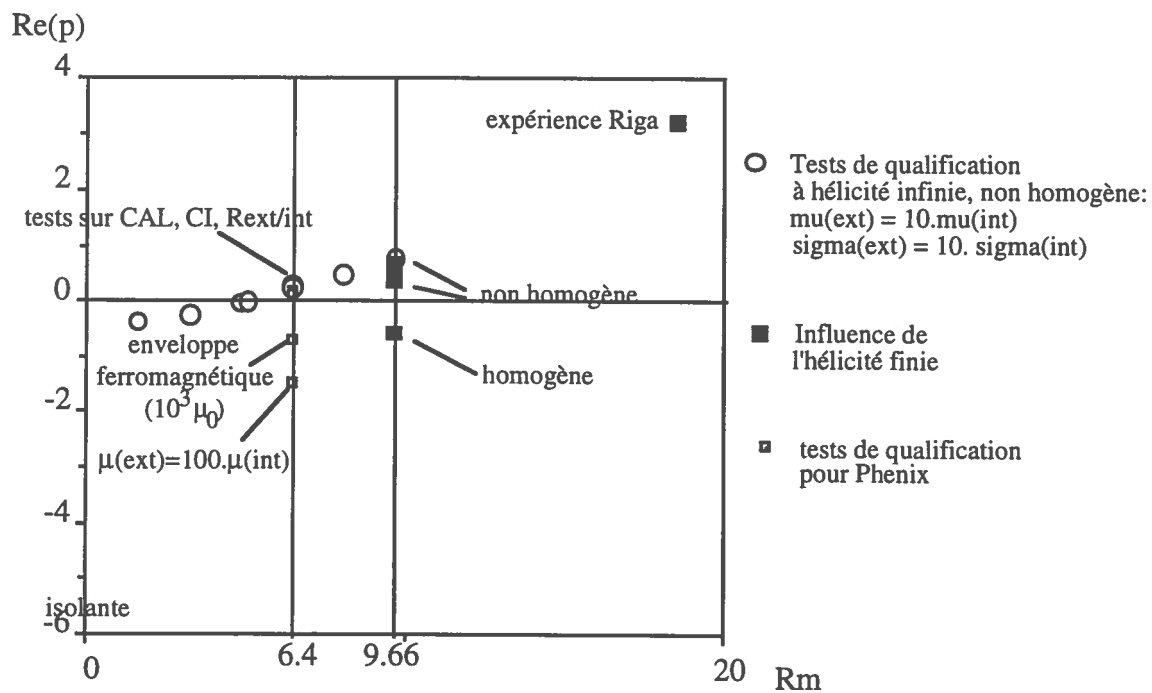


Fig. 3.32- Bilan des essais sur la géométrie de Ponomarenko

Nom	Date	Machine tcpu	$\sigma_{ext}/$ $\sigma_{cyl}$	$\mu_{ext}/$ $\mu_{cyl}$	$R_D/R$	$R_m$	CAL	CI	Ampl.	Commentaires
pono3d3020	10/01	Sun / 30h	10	10	2	12.9	Neu	1	oui	Emag(t); dessins
pono3d6	20/01	Sun / 40h	10	10	2.5	12.9	Neu	1	oui	Dessins
p3d2801neu	28/01	Sun	10	10	8	12.9	Neu	1	???	non conv. (swap); dessins
p3ddir13	13/03	Sun / 8h	10	10	8	9.66	Dir	2	+0.756	Emag(t)
pdir1703	17/03	Sun / 2.2h	1	1	8	9.66	Dir	2	-0.414	homogène; Emag(t)
p3dir1	27/03	Sun / 3h	10	10	8	1.61	Dir	2	-0.375	Emag(t)
p3dir2	27/03	Sun / 3h	10	10	8	3.22	Dir	2	-0.24	Emag(t)
p3dir3	27/03	Sun / 3h	10	10	8	4.83	Dir	2	-0.039	Emag(t)
p3dir4	27/03	Sun / 3h	10	10	8	6.44	Dir	2	+0.205	Emag(t)
p3dir5	27/03	Sun / 3h	10	10	8	8.05	Dir	2	+0.47	Emag(t)
p3d2903	29/03	Sun / 16h	10	10	8	9.66	Dir	2	oui	Dessins
p3d2606	26/07	Sun / 10j	10	10	16	5	Dir	2	+0.001	Emag(t)
p3d2807	28/07	C94 / 5h	10	10	16	6.4	Neu	2	+0.226	Emag(t)
p3d2907	29/07	C94 / 5h	10	10	16	6.4	Dir	3	+0.215	Emag(t)
p3d3007	30/07	C94 / 5h	10	10	16	6.4	Dir	4	+0.212	Emag(t)
p3d0208	02/08	C94 / 0.5h	10	10	16	6.4	Dir	2	-4.56	A non def. à ext; Emag(t)
p3d0308	03/08	C94 / 0.7h	10	10	16	6.4	Dir	2	+0.15	W non déf. à ext; Emag(t)
p3d0408	04/08	C94 / 0.5h	10	10	16	6.4	Dir	2	-5.82	Emag(t)
p3d0508	05/08	C94 / 5h	10	10	16	6.4	Dir	2	-0.7	enveloppe ferr.; Emag(t)
p3d0608	06/08	C94 / 5h	10	10	16	6.4	Dir	2	+0.224	Référence; Emag(t)
p3d0708	07/08	C94 / 5h	100	1	16	6.4	Dir	2	+0.089	Emag(t)
p3d0808	08/08	C94 / 5h	1	100	16	6.4	Dir	2	-1.452	Emag(t)

Tab. 3.6- Liste des essais réalisés pour des écoulements hélicitaires à hélicité infinie

Conditions Initiales:

$$(C.I. = 1): \begin{cases} A_x = \cos\left(\frac{\pi Z}{H}\right) \\ A_y = \sin\left(\frac{\pi Z}{H}\right) \\ A_z = W = 0 \end{cases} \quad (C.I. = 2): \begin{cases} A_x = \cos\left(\frac{\pi Z}{H}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi r}{2R_D}\right) \\ A_y = \sin\left(\frac{\pi Z}{H}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi r}{2R_D}\right) \\ A_z = W = 0 \end{cases}$$

$$(C.I. = 3) = 0.01 \quad (C.I. = 2) \quad (C.I. = 4) = 0.1 \quad (C.I. = 2)$$

$$(C.I. = 5) = \sin^2(\pi z / 2H_D) \cdot (C.I. = 2)$$

Le taux d'accroissement est évalué par:  $Re(p) = [\ln(E_2 / E_1)] / (t_2 - t_1) = q \cdot \ln 10$   
avec  $q = [\log(E_2 / E_1)] / (t_2 - t_1)$ .

Les essais pour des CI différentes montrent que les résultats obtenus sont cohérents avec la linéarité du problème ( figure 3.33).

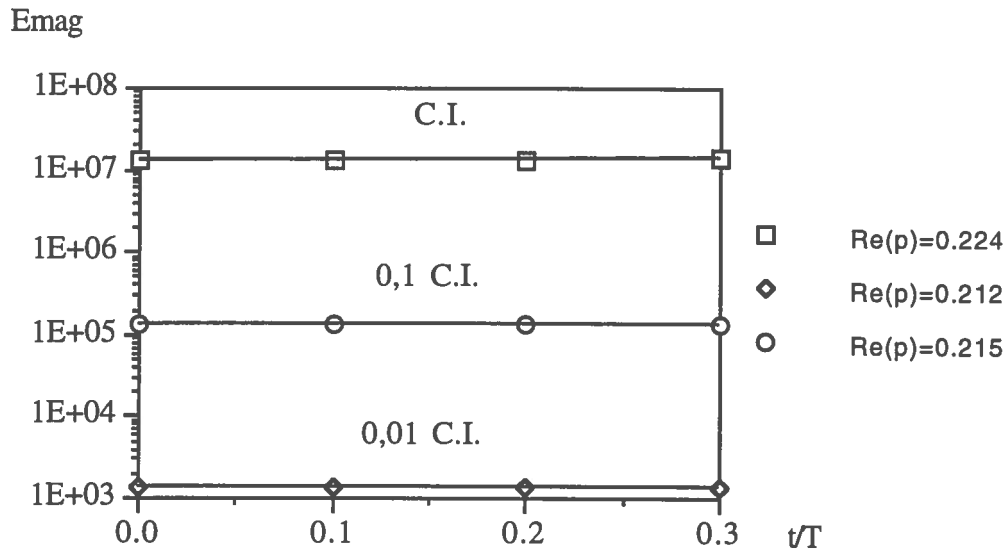


Fig. 3.33- Influence des conditions initiales; trois cas de CI sont testés pour vérifier la linéarité du problème résolu.

Des essais pour deux rapports  $R_D/R$  et deux CAL (Dirichlet et Neumann homogènes) ont été réalisés (figure 3.34).

On note une différence de taux d'accroissement de l'ordre de 7% entre  $R_D/R = 2.5$  et  $R_D/R = 16$ . Cette différence tombe à 1% entre  $R_D/R = 8$  et  $R_D/R = 16$  (non représenté).

Il y a équivalence entre les deux CAL.

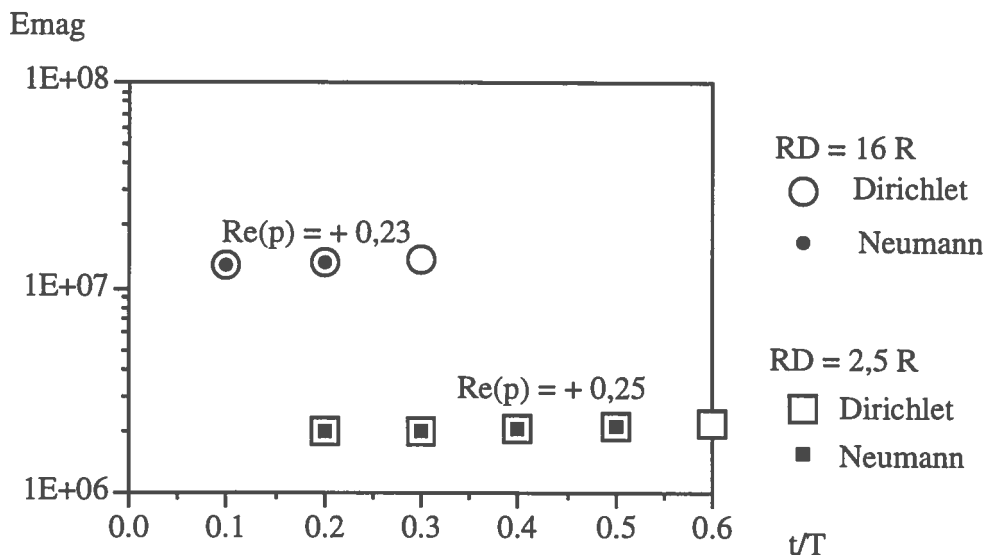


Fig. 3.34- Influence des conditions aux limites et influence du rapport de tailles entre le domaine ( $R_D$ ) et le cylindre en mouvement ( $R$ )



### III-5. Expérience de Gailitis (GAILITIS3D)

#### III-5a. Description du problème

La description de l'expérience menée à Riga en 1988, est donné par la figure 3.36.

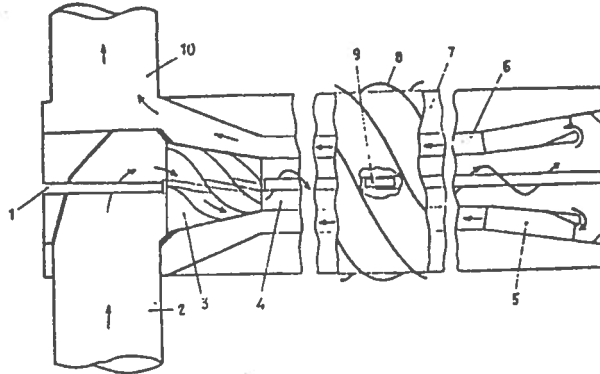


Fig. 3.36- Schéma de l'expérience menée à Riga en 1988 [Gailitis et al 1988]

L'écoulement entrant (2) acquiert une hélicité (3) qu'il conserve dans la partie interne de l'appareil (4). En bout de canal, l'écoulement est dirigé en sens inverse, puis redressé (5), de façon à être essentiellement axial (6). Il est évacué en (10). Le tout est entouré d'une couronne de sodium immobile (7). Une bobine extérieure (8) permet d'induire dans l'écoulement un champ magnétique initial. Lorsque le courant dans la bobine est coupé, on s'intéresse au déclin du champ magnétique enregistré par le capteur (9), glissé par le canal (1).

Même si l'autoexcitation n'a pas pu être atteinte pour des raisons techniques [Gailitis, 1988], les résultats obtenus (figure 3.37) permettent de prévoir un nombre de Reynolds magnétique critique autour de 18. Il était tentant de vérifier que notre modèle puisse rendre compte de cette prédiction expérimentale.

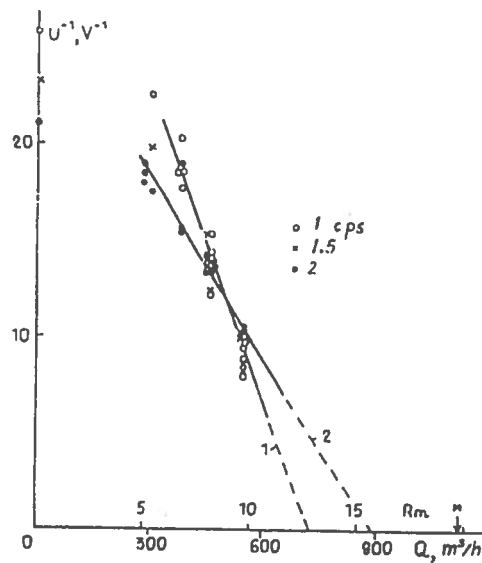


Fig. 3.37- En ordonnée:  $U^{-1}$  (resp.  $V^{-1}$ ), avec  $U$  (resp.  $V$ ) homogène au temps de déclin.  
En abscisse:  $R_m$ , proportionnel au débit.

### III-5b. Modélisation par les éléments finis

Par manque d'information, la modélisation ne reproduit pas rigoureusement l'expérience. Toutefois, la géométrie et les propriétés électromagnétiques sont semblables.

• Le domaine ( $\Omega$ ) 3D est composé de 5 cylindres coaxiaux. De l'extérieur vers l'intérieur les régions représentent:

- un milieu isolant ( $\sigma=0$ )
- du sodium au repos
- du sodium animé d'un mouvement purement axial de droite à gauche
- une paroi conductrice
- du sodium animé d'un mouvement hélicoïdal pour  $10.9 < z < 27.3$  (figure 3.40) avec  $Rm = 18.55$ .

$Rm = 18.55$ .

• La hauteur de la partie hélicitaire correspond à 2 périodes de rotation de l'écoulement.

• L'inconnue est ( $A_x, A_y, A_z, W$ ).

• Conditions Aux Limites:

Dirichlet homogène sur toutes les frontières ( $A_x, A_y, A_z, W$ ) = 0.

• Conditions Initiales:

Semblables à celles de Ponomarenko avec une atténuation en  $\cos^2(\pi r/2R_D) \sin^2(\pi z/H)$  de façon à vérifier les CAL.

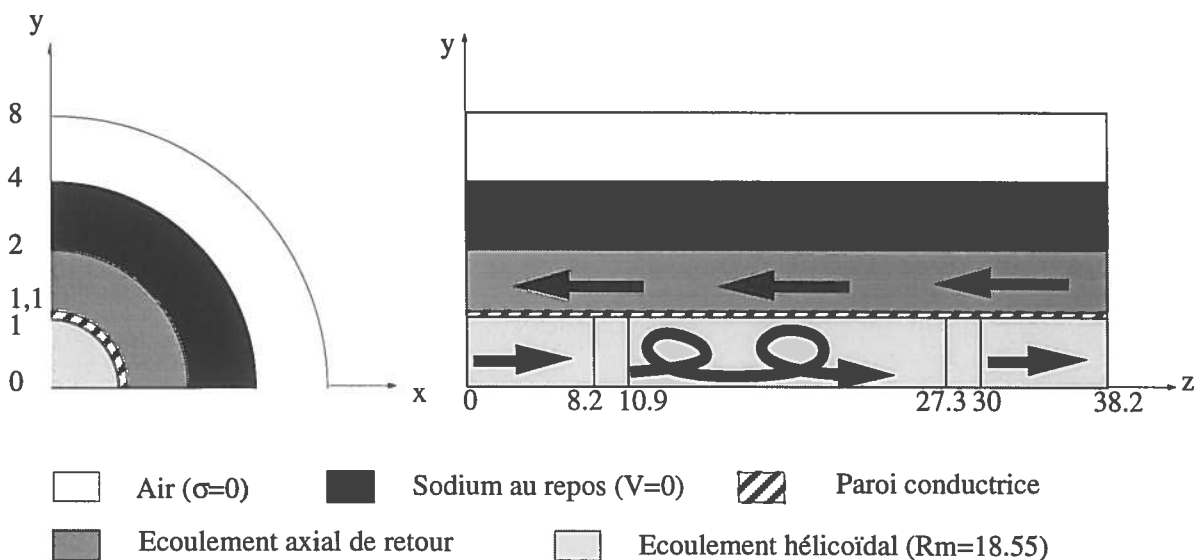


Fig. 3.38- Modélisation de l'expérience de Gailitis

• Les principales originalités de cette modélisation par rapport à l'écoulement de Ponomarenko infini sont:

- L'hélicité du modèle est finie ( $\chi = 1.3$  dans la zone médiane).
- Les propriétés électromagnétiques sont homogènes dans tout le domaine.

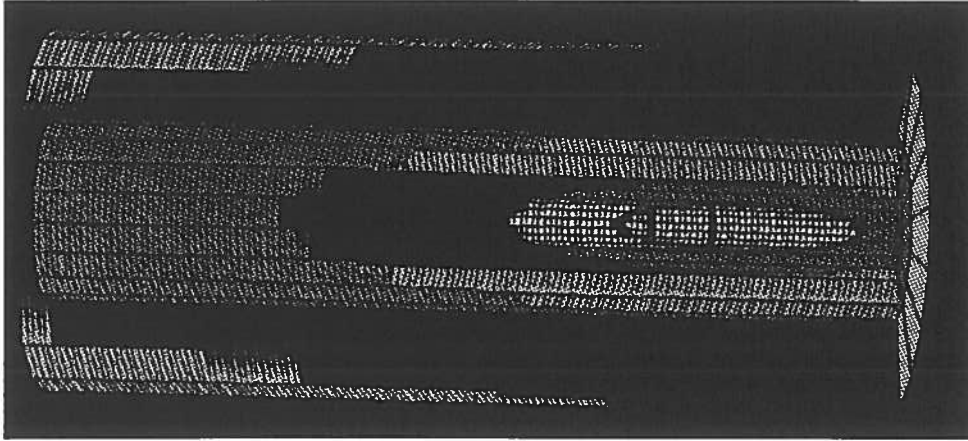


Fig. 3.39- Maillage GAILITIS3D: 17004 éléments, 60239 noeuds, 240956 degrés de liberté.

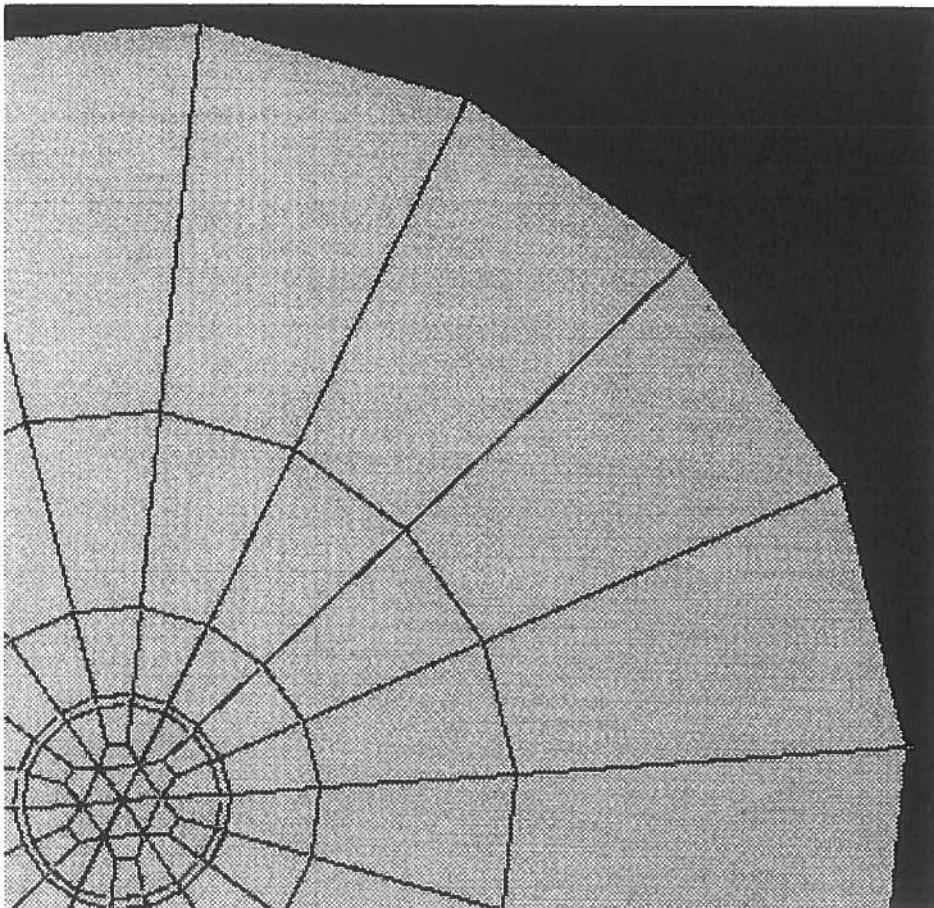


Fig. 3.40- Maillage horizontal de GAILITIS3D.

### III-5c. Résultats

Pour  $R_m = 18.55$  et un paramètre de vissage  $\chi = 1.3$ , l'énergie magnétique est trouvée croissante au cours du temps.

L'évolution temporelle de l'énergie magnétique par région (figure 3.41) montre un déclin dans les zones extérieures (Air et Sodium au repos) tandis que, dans les autres zones, le taux d'accroissement est positif (Hélice, Paroi, Retour). Ces différences de comportement sont probablement dues à une trop faible durée de calcul par rapport au temps nécessaire à l'homogénéisation du champ magnétique dans tout le domaine.

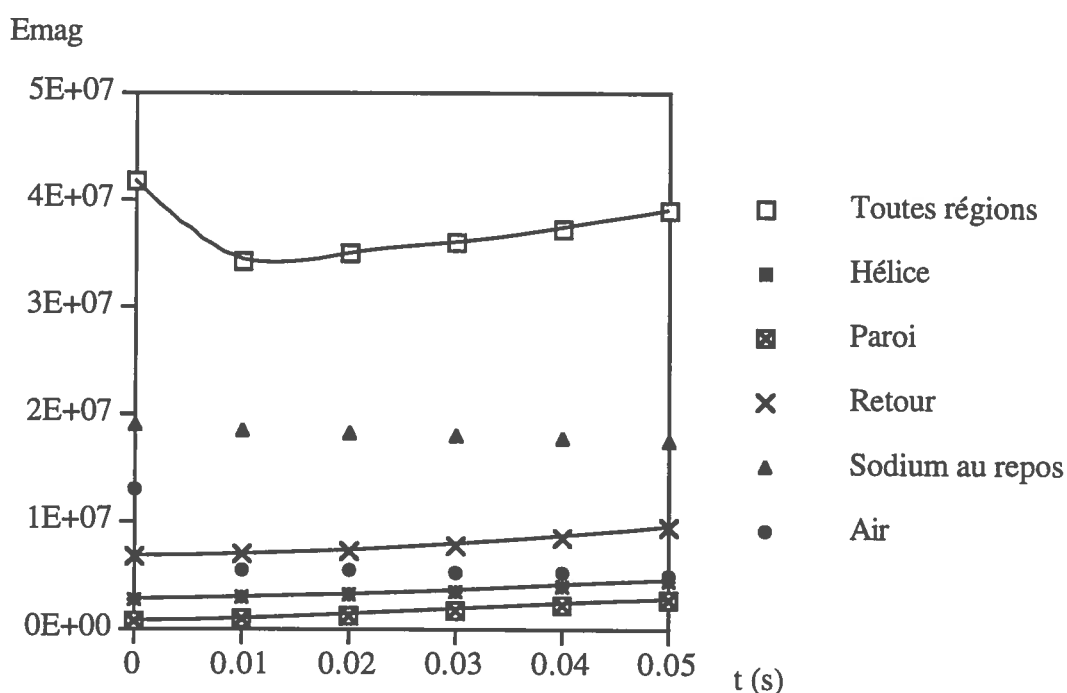


Fig. 3.41- Evolution temporelle de l'énergie magnétique par région du domaine ( $\Omega$ ).

Fig.

L'énergie maximum est concentrée aux zones de plus grand gradients de vitesse. Les isovaleurs montrent deux hélices enchevêtrées correspondant à la paroi conductrice et à la zone de cisaillement entre l'écoulement axial et le sodium au repos (figure 3.43). Le champ magnétique axial  $B_z$  est alternativement positif et négatif, d'une hélice à l'autre (figure 3.42).

## IV- Simulation du coeur de Phenix

Dans la première section sont présentés les résultats concernant un réseau d'assemblages homogènes (mêmes propriétés électromagnétiques) sans ceinture ferromagnétique. Le but est d'effectuer une approche progressive par le nombre d'assemblages modélisés, afin d'étudier l'influence du nombre d'assemblages sur un éventuel effet dynamo d'une part, mais aussi, d'autre part, d'optimiser les paramètres du maillage afin de pouvoir représenter un nombre maximum d'assemblages.

Dans la seconde section, les résultats concernent une distribution d'éléments ferromagnétiques correspondant au chargement du coeur du 30 Août 1990, avec une ceinture ferromagnétique.

Tous ces calculs ont été réalisés sur le Cray C94 du CENG.

La méthode numérique utilisée ainsi que les principaux résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une soumission au 8th Beer-Sheva Int. Seminar on MHD-flows and turbulence (1996).

## IV-1. Réseau homogène

### IV-1a. Modélisation par les éléments finis

- Le domaine ( $\Omega$ ) 3D est composé de N couronnes, N pouvant varier de 0 à 5 (tableau 3.7) plus une zone extérieure de rayon  $R_D$ .

Nombre de couronnes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'assemblages	1	7	19	37	61	91	127	169	217	271

Tab. 3.7- Tableau d'équivalence entre nombre de couronnes et d'assemblages.

- L'inconnue ( $A_x, A_y, A_z, W$ ) est définie partout dans le cas homogène.
- Conditions Aux Limites:
  - Dirichlet homogène sur toutes les frontières extérieures de ( $\Omega$ ):
 
$$(A_x, A_y, A_z, W) = (0, 0, 0, 0).$$
- Conditions initiales:
  - 2 types de conditions initiales ont été testées, avec une longueur d'onde plus ou moins longue.
- Le champ de vitesse est défini au paragraphe I-1f de la Partie 3. Il y a 12 périodes de rotation dans la hauteur de la zone hélicoïdale.
- La conductivité est homogène dans tout le domaine ( $\Omega$ ).
- La perméabilité est homogène, dans tout le domaine ( $\Omega$ ).
- Le maillage horizontal du réseau homogène à 61 assemblage est semblable à celui comprenant 91 assemblages avec une couronne de moins.
- Les paramètres retenus pour la simulation numérique sont décrits dans le tableau 3.8.

R (m)	$R_D$ (m)	$\sigma$ ( $\Omega^{-1}m^{-1}$ )	$\mu$ ( $H m^{-1}$ )	$V_z$ ( $m s^{-1}$ )	$\omega_{max}$ ( $rad s^{-1}$ )	$\Delta t$ (s)
0.06	2	$4 \cdot 10^6$	$4\pi 10^{-7}$	3.6	100	0.009

Tab. 3.8- Paramètres retenus pour la simulation numérique de Phenix Homogène

## IV-1b. Résultats

### • Réseau de 7 assemblages

Un calcul préliminaire a été effectué sur un réseau homogène de 7 assemblages. Deux types de conditions initiales ont été testées pour des périodes axiales du champ magnétique différentes.

- La première (1) correspond à un champ magnétique initial de longueur d'onde égale à celle de l'écoulement.
- La seconde (2) correspond à un champ magnétique initial de longueur d'onde égale à la hauteur du réacteur.

On constate dans les deux cas, que le temps de déclin de l'énergie magnétique est supérieur au temps de déclin caractéristique de diffusion pour un assemblage.

La seconde condition initiale (figure 3.44) semble plus adaptée à l'organisation réelle que le champ magnétique peut avoir à l'échelle du coeur (les grandes longueurs d'onde sont plus facilement excitées). Elle a été retenue pour les simulations suivantes.

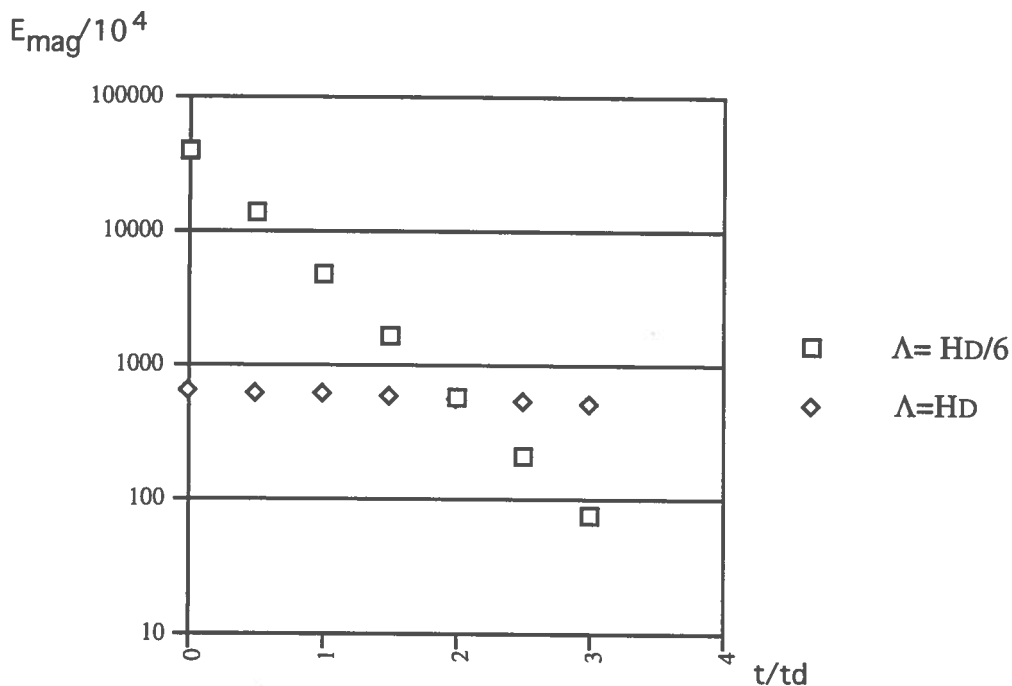


Fig. 3.44- Evolution de l'énergie magnétique en fonction du temps pour deux conditions initiales différentes, correspondant à deux longueurs d'onde  $\Lambda$  différentes du champ magnétique. Le temps est donné par rapport à  $t_d$ , temps caractéristique de diffusion à l'échelle d'un assemblage ( $t_d = \sigma\mu R^2 = 1.810^{-2}$ ).

### Réseau de 1 à 61 assemblages

Trois essais ont été réalisés pour 0, 1 et 4 couronnes d'assemblages. On constate (figure 3.45) que dans les trois cas, l'énergie magnétique décroît. La décroissance est plus faible en valeur absolue lorsqu'on augmente le nombre d'assemblages.

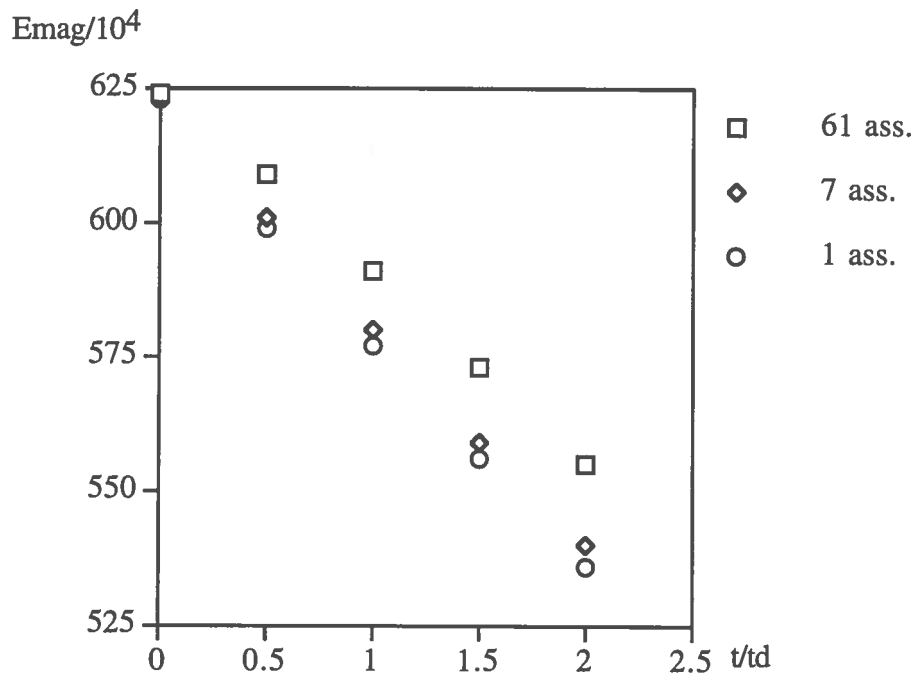


Fig. 3.45- Evolution temporelle de l'énergie magnétique en fonction du nombre d'assemblages ( $t_d = \sigma\mu R^2 = 1.8 \cdot 10^{-2}$ ).

Une extrapolation des résultats a été faite (figure 3.46) de deux manières:

- L'extrapolation polynomiale de degré 2 permet de prédire un effet dynamo à partir de 930 assemblages, correspondant à 17 couronnes<sup>1</sup>.
- L'extrapolation linéaire permet de prédire un effet dynamo à partir de 270 assemblages, correspondant à 9 couronnes.

Le coeur de Phenix comprend dans sa partie combustible et fertile 271 assemblages, réparties en 9 couronnes. Cette extrapolation bien que radicale permet néanmoins de mettre en valeur l'existence d'une marge de sécurité vis à vis d'éventuelles instabilités dues à la dynamo.

<sup>1</sup> Il y a  $1+3n(n+1)$  assemblages dans un coeur à n couronnes.



Nbre d'ass.

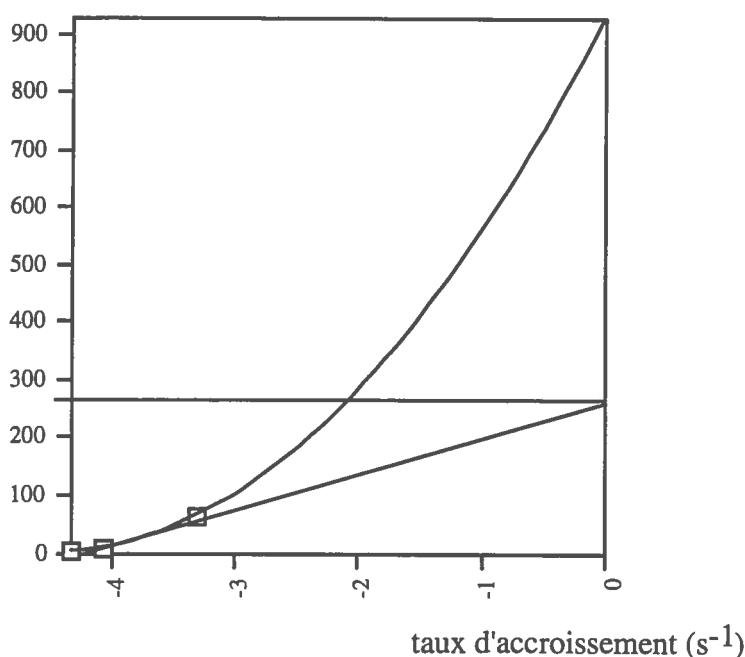


Fig. 3.46- Extrapolation du nombre d'assemblages nécessaires pour que le taux d'accroissement devienne positif. Le taux d'accroissement est évalué de la même manière qu'au tableau 3.6.

Le calcul des isovaleurs de  $B_z$  dans une section droite horizontale montre une tendance à obtenir une organisation du champ magnétique à l'échelle du coeur (figure 3.48). Compte-tenu des résultats de l'extrapolation précédente, et avec l'éclairage de la figure 3.48, on peut conclure à l'existence d'un rapport seuil entre l'échelle macroscopique du champ magnétique (taille du coeur) et l'échelle de l'écoulement (taille de l'assemblage) au-delà duquel il pourrait y avoir amplification magnétique. Un tel mécanisme reposant sur la séparation des échelles hydraulique et magnétique est par exemple mis en oeuvre dans la réalisation expérimentale de Karlsruhe [Busse et al, 1995] pour générer de l'effet dynamo. Dans le cas de Phenix, le nombre d'assemblages en place est inférieur d'un facteur 3 au nombre d'assemblages nécessaires pour engendrer un tel phénomène.

Le calcul des forces électromagnétiques (figure 3.47) montre une répartition homogène de celles-ci d'un assemblage à l'autre. A l'intérieur de chacun d'entre-eux, les forces électromagnétiques s'opposent naturellement au mouvement qui leur a donné naissance.

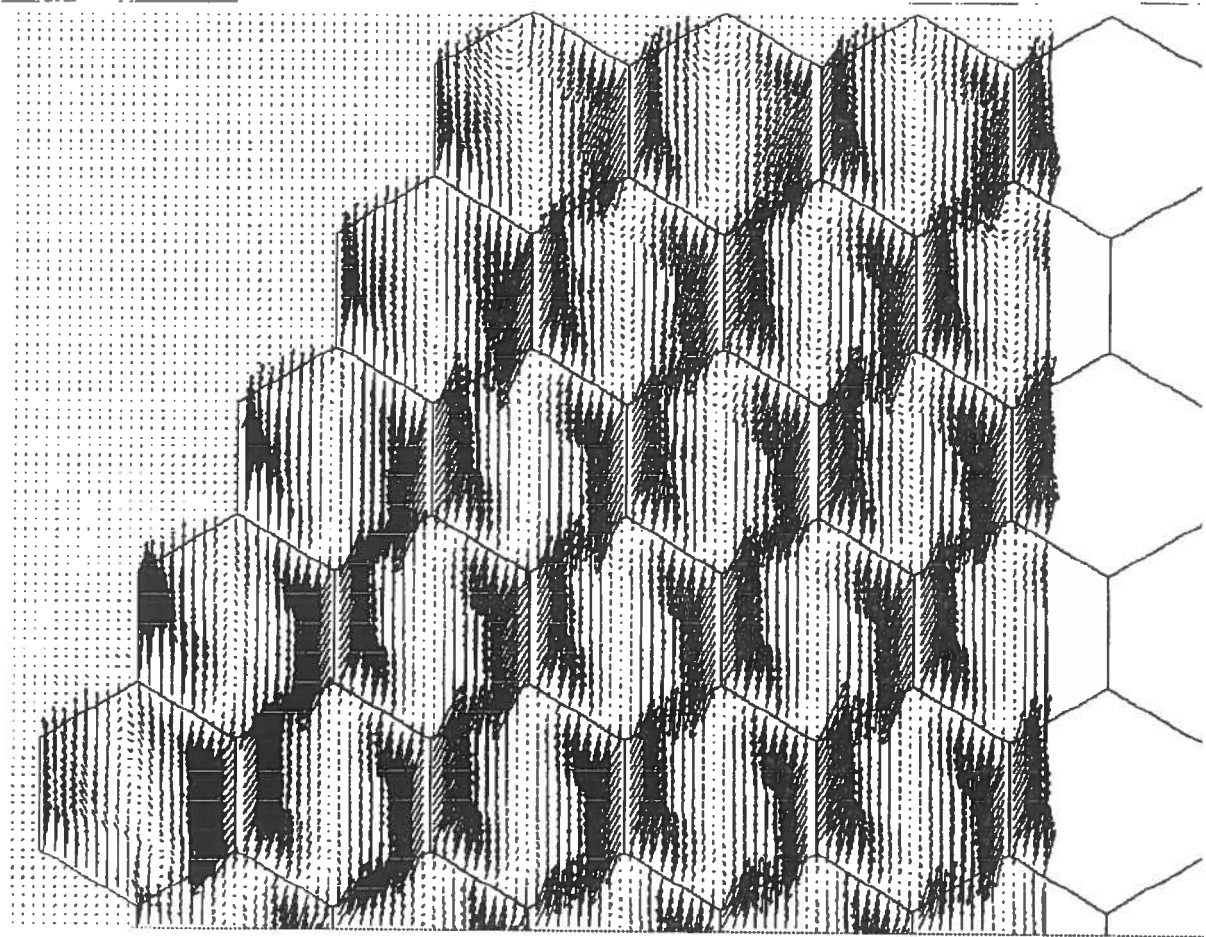


Fig. 3.47- Champ de forces électromagnétiques dans une section horizontale, pour un coeur homogène.

## IV-2. Réseau hétérogène

### IV-2a. Modélisation par les éléments finis

La modélisation du réseau hétérogène est identique à celle du réseau homogène, sauf pour les points suivants:

- La géométrie comporte 91 assemblages.
- Pour pouvoir prendre en compte 30 assemblages supplémentaires, les zones d'écoulement axiale ont été supprimées à chaque extrémité inférieure et supérieure. Les zones de transitions sont conservées (l'hélicité reste donc finie).
- Parmi les 91 assemblages, 17 ont une perméabilité 100 fois plus élevée. En réalité, ceux-ci plus 9 autres sur la sixième couronne ont une perméabilité 1000 fois plus grande.
- Il n'y a pas d'écoulement dans les assemblages ferromagnétiques et leur perméabilité est égale à  $10^2 \mu_0$  (§I-2d. de la même partie).
- Au-delà de la zone correspondant à la couverture fertile, A n'est pas défini. La condition appliquée à la frontière est de Neumann homogène, de façon à modéliser la ceinture ferromagnétique.
- La couverture fertile a été remplacée par une zone immobile. En réalité, un écoulement parcourt ses assemblages, de façon similaire à la partie combustible, mais avec une vitesse débitante 4 fois plus faible.

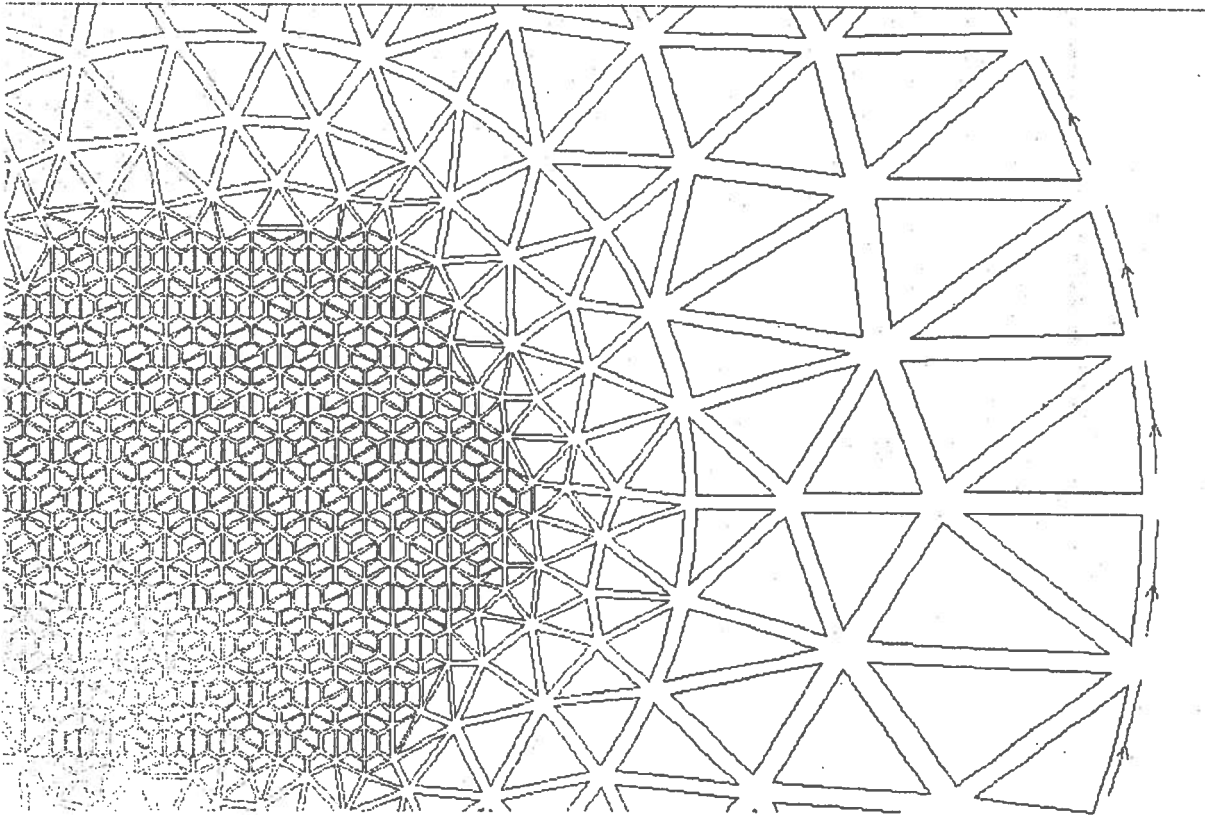


Fig. 3.49- Maillage du coeur à 91 assemblages (Nombre d'éléments 18904; de noeuds 59387; de degrés de liberté 237548).

Le champ de vitesse dans une section horizontale est reproduit à la figure 3.50. On peut vérifier que la composante horizontale du champ de vitesse est bien une rotation en bloc. A cette composante horizontale, il faut rajouter une composante verticale définie en Partie 3 §I-1.e.

Les assemblages sans champ de vitesse sont les assemblages ferromagnétiques, d'une perméabilité 100 fois supérieure à celle du sodium.

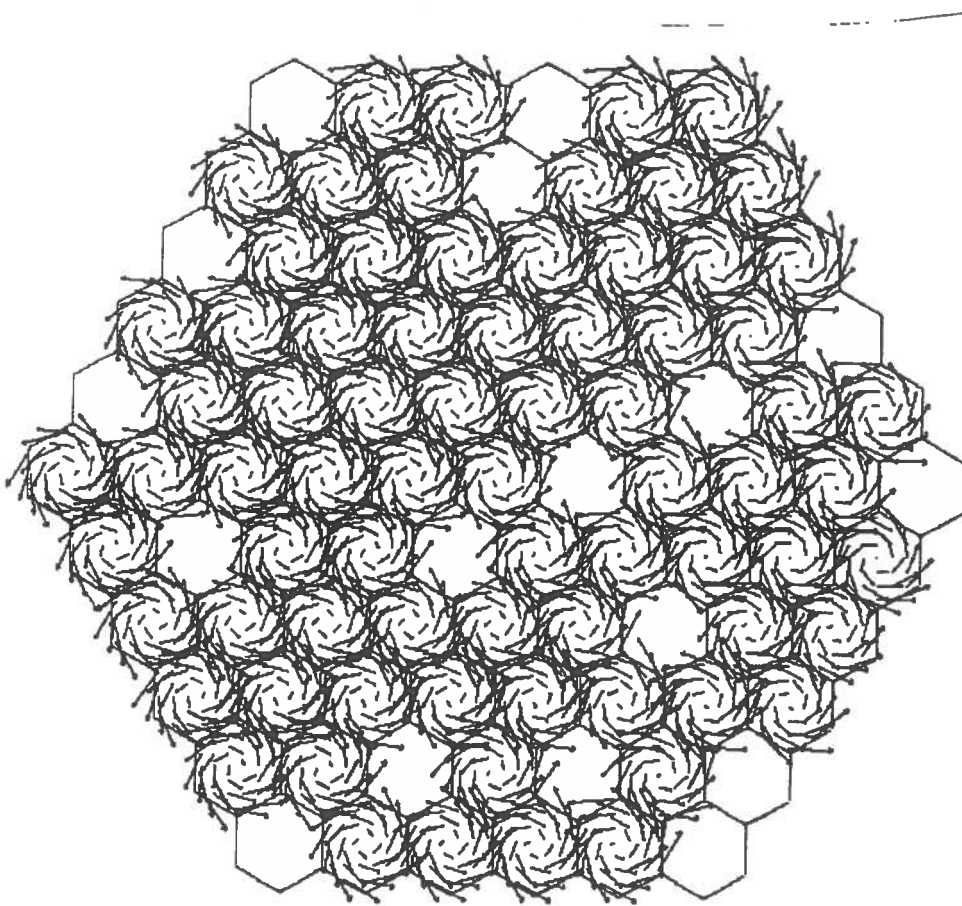


Fig. 3.50- Champ de vitesse dans une section horizontale (coeur hétérogène).

## IV-2b. Energie électromagnétique

L'évolution de l'énergie magnétique en fonction du temps a été calculée dans le domaine entier puis dans différentes régions (figure 3.51).

- A l'échelle du coeur, l'énergie décroît, ainsi que dans la couverture fertile et dans les assemblages non ferromagnétiques, avec un taux de croissance de l'ordre de  $-6 \text{ s}^{-1}$ .

- En revanche, l'énergie dans les assemblages ferromagnétiques est croissante au cours du temps. Conformément aux hypothèses de magnétostatique, elle reste confinée sur les bords des assemblages ferromagnétiques.

- L'énergie magnétique calculée sur tous les assemblages ferromagnétiques possède à peu près le même taux de croissance que pour chacun d'entre eux. Ce taux de croissance commun est de l'ordre de  $40 \text{ s}^{-1}$ .

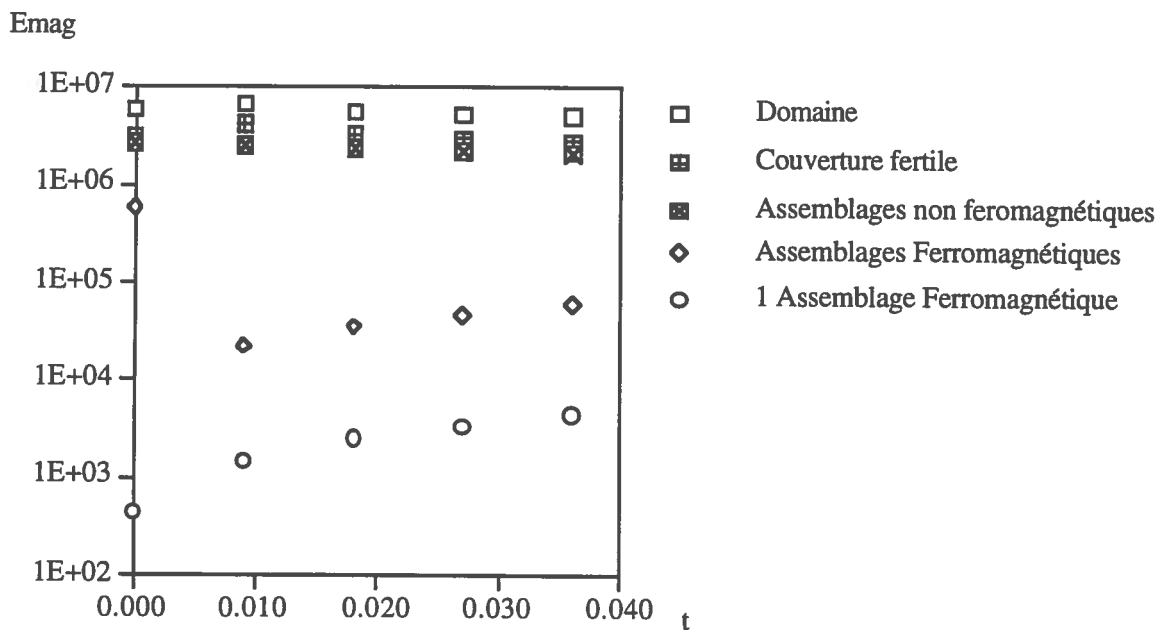
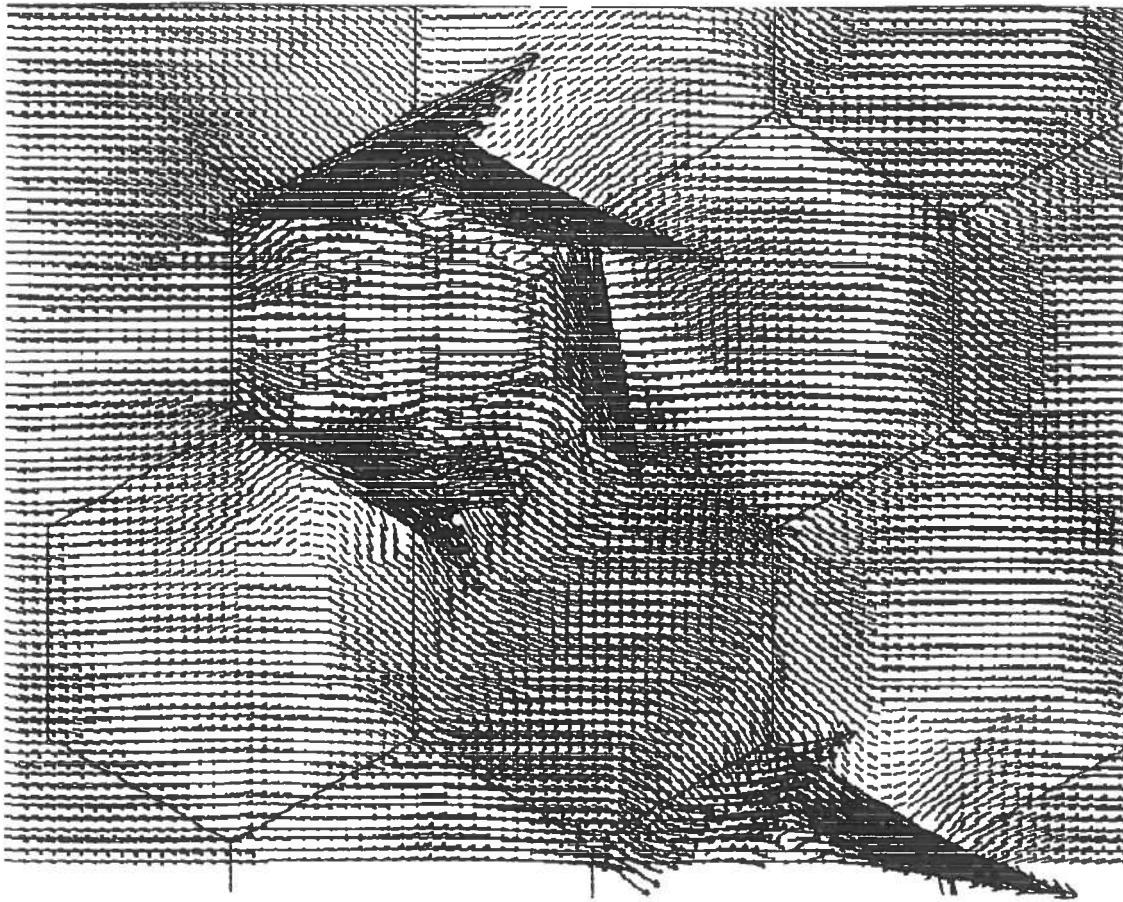


Fig. 3.51- Evolution temporelle de l'énergie magnétique en fonction du temps et pour des régions différentes du domaine.

L'allure des lignes de champ magnétique dans une partie du coeur hétérogène et dans une section horizontale est reproduite à la figure 3.52. La partie du coeur représentée est le coin Ouest de la figure 3.50, comprenant 5 assemblages dans leur entier, dont un assemblage ferromagnétique en bordure du coeur. On vérifie que les lignes de champ magnétique, comme indiqué à la figure 3.11 (Partie 3 §I-2d), sont concentrées en majorité dans l'enveloppe de l'assemblage.



3.52- Champ magnétique dans une section horizontale (coeur hétérogène).

De façon à évaluer l'influence de l'amplification d'énergie magnétique mise en évidence dans les assemblages ferromagnétiques, l'expression des forces électromagnétiques correspondantes a été déterminée.

#### IV-2c. Forces électromagnétiques

La distribution de la densité de force  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  en chaque point du coeur est représenté à la figure 3.53. On constate que les forces de plus grande intensité sont concentrées sur les bords des assemblages ferromagnétiques. La figure 3.53, ainsi que les suivantes résulte du calcul de densité de force après 4 pas de temps de calcul. Au cours de ces 4 premiers pas de temps, l'intensité des forces électromagnétiques est croissante, avec un taux de croissance double par rapport à celui du champ magnétique calculé au paragraphe précédent.

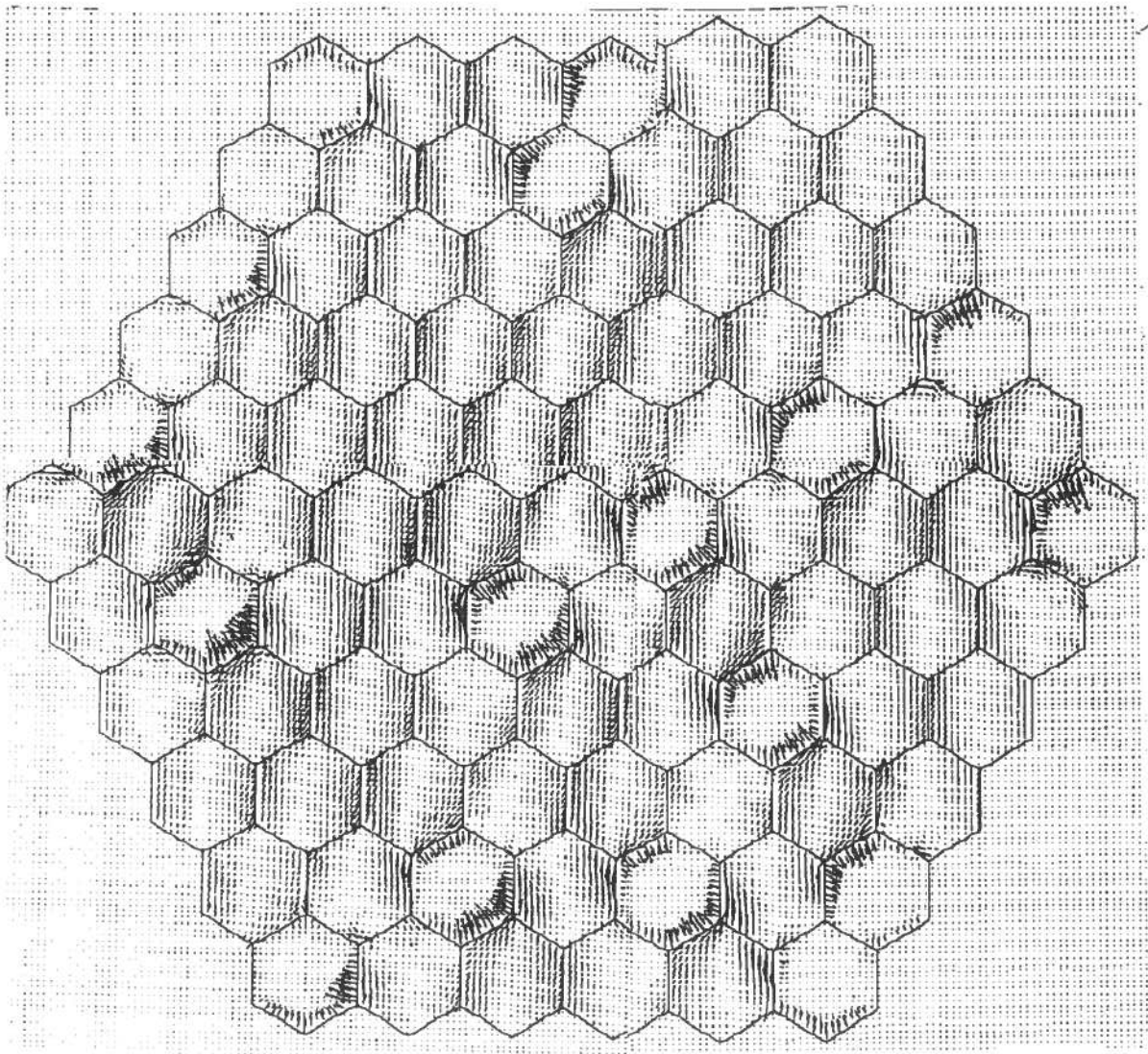


Fig. 3.53- Composante horizontale des forces électromagnétiques dans une section droite horizontale du coeur dans son ensemble.

- Pour un assemblage ferromagnétique entouré de 6 voisins austénitiques, les forces électromagnétiques sont axisymétriques, avec une composante horizontale centripète (figure 3.54) et une composante verticale positive. Le bilan net de ces forces dans une section horizontale ne peut donc pas contribuer au déplacement latéral des assemblages.

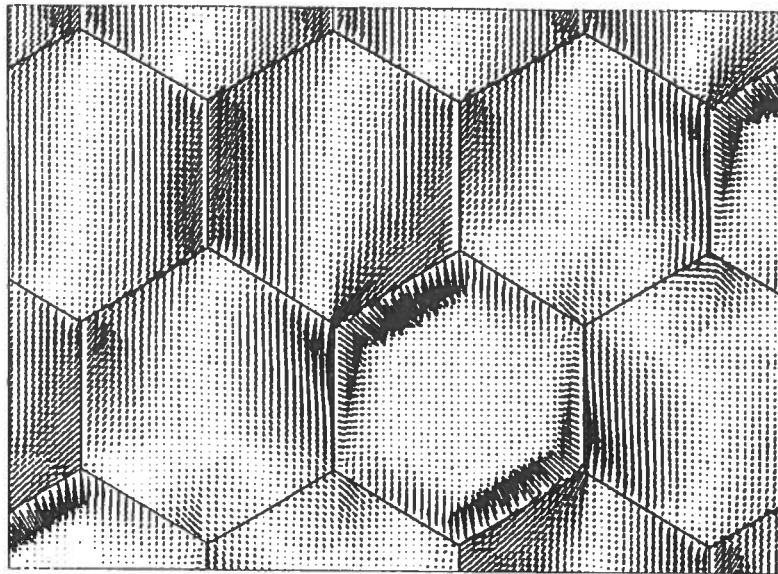


Fig. 3.54- Composante horizontale des forces électromagnétiques dans une section droite horizontale au voisinage du milieu du cœur.



• En revanche, pour un assemblage ferromagnétique placé sur la cinquième couronne, en bordure du coeur, les forces ne sont plus axisymétriques (figure 3.55), du fait probablement de la différence de vitesse entre le côté combustible (intérieur) et le côté fertile (extérieur). Dans la partie Ouest du coeur (figure 3.55), la résultante latérale de densité de forces électromagnétique est dirigée vers l'extérieur du coeur. Ces forces peuvent contribuer au déplacement latéral des assemblages.

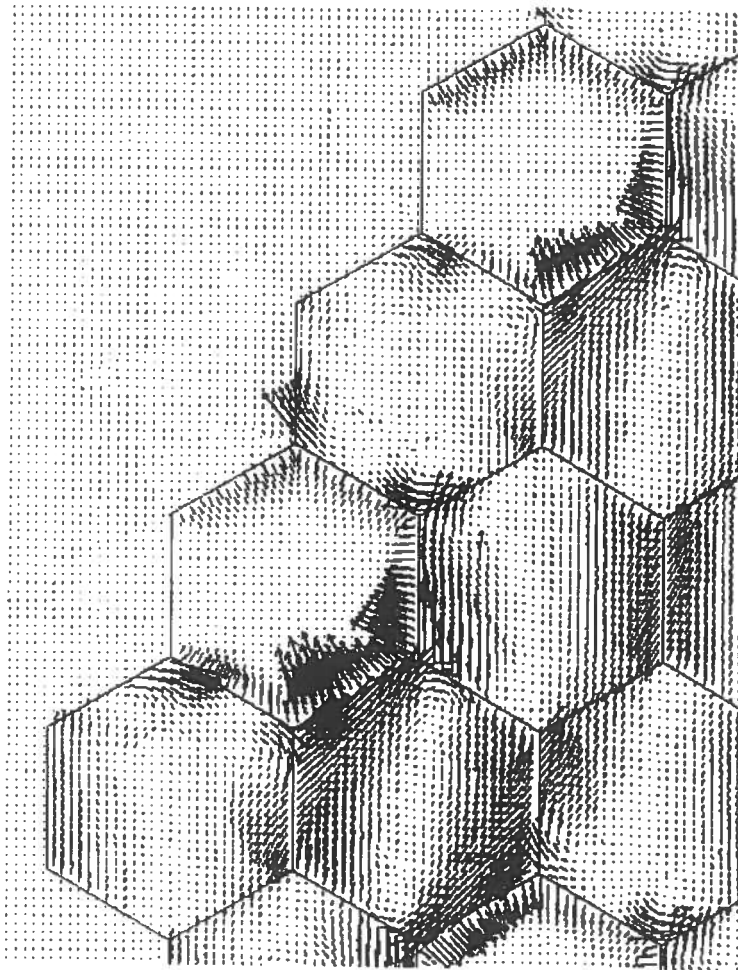


Fig. 3.55- Composante horizontale des forces électromagnétiques dans une section droite horizontale dans la région Ouest du coeur.

- La représentation en coupe verticale de trois assemblages du coeur est représentée à la figure 3.56 et confirme les remarques concernant les représentations aux figures 3.54 et 3.55:
  - Les forces électromagnétiques dans les assemblages ferromagnétiques (a) et (c) sont prépondérantes en intensité par rapport à celles présentes dans un assemblage austénitique (b).
  - Dans un assemblage ferromagnétique situé au centre du coeur (a), la distribution de densité de force est axisymétrique, avec une forte composante latérale par rapport à la composante verticale.
  - Dans un assemblage ferromagnétique situé en bordure du coeur (c), la distribution de densité de forces est dissymétrique avec une forte composante latérale par rapport à la composante verticale.

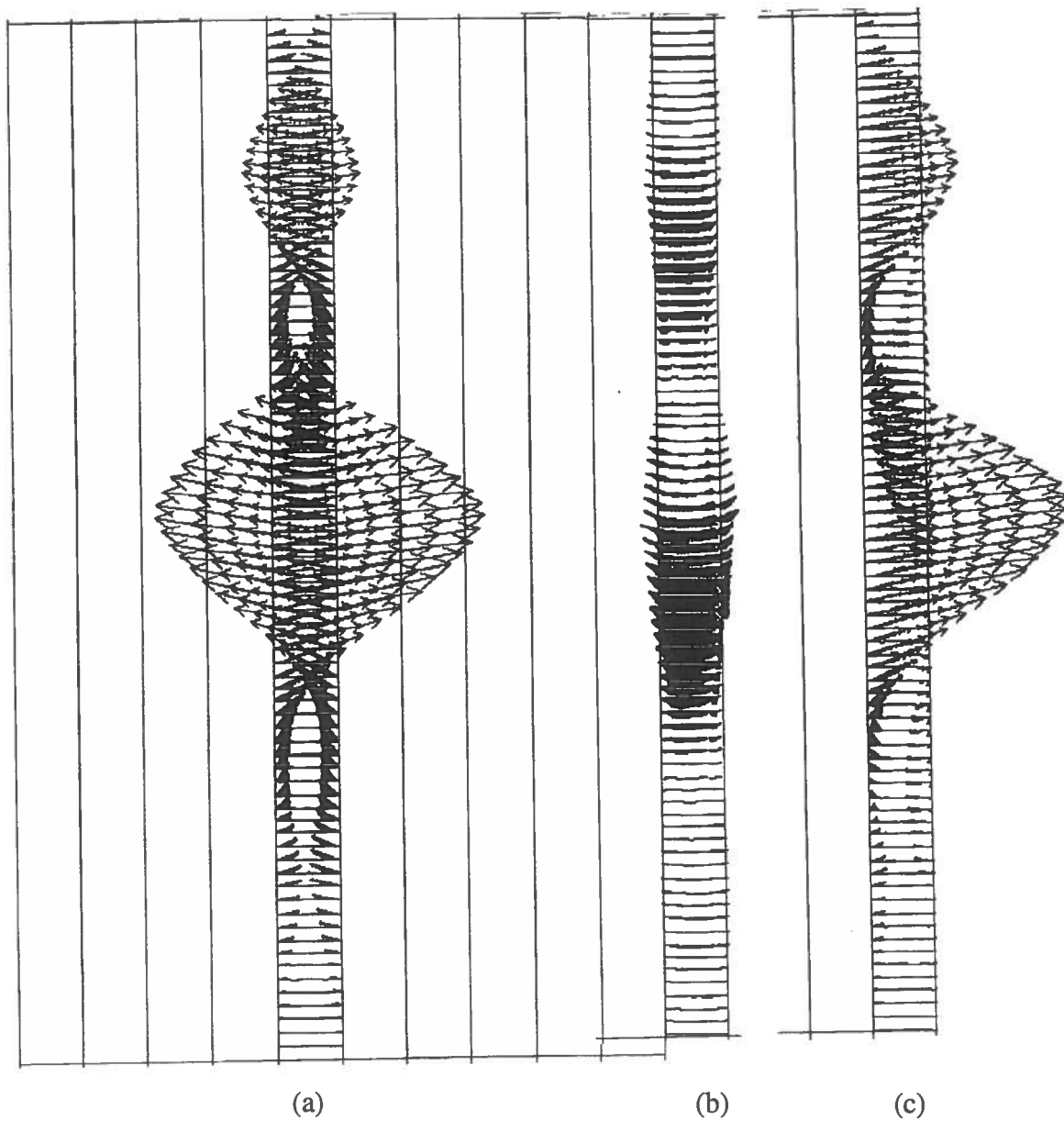


Fig. 3.56- Forces électromagnétiques dans une section droite verticale: (a) dans un assemblage ferromagnétique à l'intérieur du coeur; (b) dans un assemblage austénitique à l'intérieur du coeur; (c) dans un assemblage ferromagnétique en bordure du coeur.

## V- Conclusion

### V-1. Résultats de l'étude

Nous avons modélisé par la méthode des Eléments Finis les équations de l'effet dynamo dans une géométrie correspondant à:

- Un réseau de 61 assemblages identiques.
- Un coeur combustible (91 assemblages) entouré d'un coeur fertile (supposé sans vitesse) et d'une protection neutronique latérale (forte perméabilité magnétique), certains assemblages étant fabriqués avec un acier ferromagnétique.

#### V-1a. Sans assemblages ferromagnétiques

- L'effet dynamo n'a pas été observé pour un réseau comprenant 1 à 61 assemblages homogènes.
- Le déclin de l'énergie magnétique calculée est moins fort lorsque le nombre d'assemblages augmente. Une organisation du champ magnétique à l'échelle du réseau semble vouloir se mettre en place.
- Une extrapolation de cette tendance montre qu'il faudrait entre 270 et 930 assemblages pour autoexciter, plus qu'il n'y en a en réalité dans le réacteur Phenix.

### **V-1b. Avec 17 assemblages ferromagnétiques**

- Dans la configuration du coeur comprenant 17 assemblages ferromagnétiques, aucun effet dynamo à l'échelle du coeur n'a été observé.
- Cependant, il semble qu'un effet dynamo local, confiné dans les parties ferromagnétiques des assemblages ait lieu.
- Le calcul des forces électromagnétiques montre qu'elles sont centripètes et dirigées vers le haut, sur les parois de tous les assemblages ferromagnétiques sauf ceux en bordure du coeur combustible.
- Ces derniers ont une résultante latérale dirigée vers l'extérieur du coeur.

Il semblerait donc que le champ magnétique s'organise de façon particulière à cause de la présence d'assemblages ferromagnétiques. L'effet dynamo local résultant pourrait être la source d'instabilités mécaniques dans les assemblages ferromagnétiques de la cinquième couronne.

Dans le cas où tous les assemblages sont ferromagnétiques, il est probable que les phénomènes mis en évidence précédemment soient annulés du fait:

- de la symétrie retrouvée.
- du nombre de Reynolds magnétique trop faible à l'échelle d'un assemblage pour générer localement un effet dynamo.

## V-2. Perspectives

### V-2a. Modélisation du coeur

Une modélisation plus fine du coeur est possible. En particulier, il faudrait:

- Mailler les parois ferromagnétiques des assemblages, de façon à prendre en compte l'écoulement interne.
- Mailler la protection ferromagnétique du coeur de façon à considérer les phénomènes électromagnétiques éventuels

Ces deux points sont réalisables à condition:

- De disposer d'une version parallélisée du code utilisé. En effet, le surcroît d'inconnues occasionné par le maillage des parois n'est pas envisageable avec la version vectorielle actuelle du code. Les deux dernières simulations (plus de 200.000 degrés de liberté) ont nécessité plus de 8 heures de Cray C94 par pas de temps!!!).
- De remplacer le maillage de la protection neutronique latérale par des super-éléments permettant d'approcher le comportement jusqu'à l'infini de l'inconnue sur un nombre restreint de mailles.

### V-2b. Outil de simulation de l'effet dynamo

Un outil numérique a été développé; il permet de modéliser les équations de l'effet dynamo jusqu'à un nombre de Reynolds magnétique de quelques dizaines, et pour une géométrie éventuellement complexe.

Cet outil pourrait permettre en particulier de modéliser les deux expériences dynamo en cours actuellement (Riga et Karlsruhe).

Il peut permettre aussi de mieux caractériser certains aspects topologiques de l'effet dynamo tels que le rebouclage des lignes de champ magnétique dans l'espace et d'étudier l'influence de quantités scalaires tels que les hélicités croisées (entre champ de vitesse et champ magnétique).

Enfin, on doit pouvoir marier les Eléments Finis avec des méthodes spectrales, qui permettraient une économie substantielle de temps de calcul pour certains problèmes adaptés.

## Annexe 3A

### Assemblage à 19 aiguilles

Diamètre d'une aiguille:	$\phi_{\text{aig}} = 8.10^{-3} \text{ m}$
Diamètre du fil:	$\phi_{\text{fil}} = 1.5.10^{-3} \text{ m}$
Pas du fil:	$d = 15.10^{-2} \text{ m}$
Rayon de l'assemblage:	$R = \frac{\sqrt{3}}{4}(5\phi_{\text{aig}} + 6\phi_{\text{fil}}) = 21.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Surface de l'assemblage:	$S_{\text{Ass}} = 2\sqrt{3} R^2 = 15.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

### Assemblage à 217 aiguilles

Diamètre d'une aiguille:	$\phi_{\text{aig}} = 6.5510^{-3} \text{ m}$
Diamètre du fil:	$\phi_{\text{fil}} = 1.15.10^{-3} \text{ m}$
Pas du fil:	$d = 15.10^{-2} \text{ m}$
Rayon de l'assemblage:	$R = 61.85.10^{-3} \text{ m}$
Surface de l'assemblage:	$S_{\text{Ass}} = 2\sqrt{3} R^2 = 132.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
Surface mouillée:	$S_{\text{Na}} = S_{\text{Ass}} - S_{\text{Env.}} - 217.(S_{\text{Aig.}} + S_{\text{Fil}}) = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
Vitesse débitante:	$\bar{V}_z = 1 \text{ m.s}^{-1}$

## Annexe 3B

### Intégrants de la formulation en potentiels (A, W)

*Calcul de la matrice M*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les coefficients suivants:

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z}$$

$$M_{12} = -v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \quad M_{13} = -v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z}$$

$$M_{21} = -v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \quad M_{23} = -v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z}$$

$$M_{31} = -v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} + v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \quad M_{32} = -v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} + v_r \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y}$$

*Calcul de la matrice L*

$$L = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 & 0 & N_{14} \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & N_{33} & N_{34} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{pmatrix}$$

avec les coefficients suivants:

$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = \mu_0 \sigma \alpha_i \alpha_j$$

$$N_{14} = \mu_0 \sigma \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \quad N_{24} = \mu_0 \sigma \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \quad N_{34} = \mu_0 \sigma \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial z}$$

$$N_{41} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \alpha_j \quad N_{42} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \alpha_j \quad N_{43} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \alpha_j$$

$$L_{44} = \mu_0 \sigma \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right)$$

## Annexe 3C

A chaque itération, la valeur de  $A$  à l'itération précédente est remplacée selon la formule:

$$\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} V_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - V_z \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ V_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - V_x \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ V_x \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - V_y \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \end{pmatrix}$$

où les dérivées spatiales de  $A$  sont évaluées par un schéma centré. Ce choix impose une contrainte sur le nombre de Reynolds magnétique, commune à d'autres problèmes diffusivo-convectifs traités de la même manière.

### Contrainte $R_m < 2$ (en dimension 1)

Lorsque les dérivées spatiales de l'inconnue principale affectée au termes de transport sont approximées par un schéma central, dans un problème diffusivo-convectif, alors, le rapport des temps caractéristiques diffusion sur convection doit toujours être inférieur à 2 dans chaque élément du domaine, afin d'éviter des rebonds numériques.

Plaçons-nous en dimension 1, sans terme transitoire. La troisième composante du potentiel vecteur vérifie alors:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \mu \sigma V_x \frac{\partial A}{\partial x}$$

Prenons un schéma centré pour l'expression  $\frac{\partial A}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2\Delta x}$$

et le schéma (centré) standard de dérivée seconde:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{A_{i+1} + A_{i-1} - 2A_i}{(\Delta x)^2}$$

Lorsqu'on remplace ces expressions dans l'équation de comportement de  $A$ , on obtient:

$$(A_{i+1} - A_i) \left( 1 - \frac{(R_m)_{\text{maille}}}{2} \right) = (A_i - A_{i-1}) \left( 1 + \frac{(R_m)_{\text{maille}}}{2} \right), \text{ avec } (R_m)_{\text{maille}} = \alpha \mu \cdot V_x \cdot \Delta x$$

On voit alors que si  $(R_m)_{\text{maille}}$  est supérieur à 2, alors  $(A_{i+1} - A_i)$  et  $(A_i - A_{i-1})$  sont de signes contraires et provoqueront un rebond numérique. La contrainte suivante doit donc toujours être vérifiée:

$$(R_m)_{\text{maille}} < 2.$$



# **Conclusions et Perspectives**

# I- Résumé de la thèse

## I.1- Introduction (Première Partie)

L'effet dynamo désigne la conversion d'énergie cinétique en énergie magnétique par un écoulement conducteur de l'électricité. Ce phénomène permet d'expliquer l'existence de champ magnétique dans la plupart des objets astrophysiques. Dans le cas de la Terre par exemple, il prend lieu au sein de la partie liquide du noyau où la convection des métaux liquides est entretenue par les gradients thermiques présents au voisinage de la graine solide.

Si dans le cas de la Terre l'effet dynamo est souhaitable pour la mission protectrice du champ magnétique qu'il génère (bouclier magnétique terrestre), il est en revanche indésirable dans les grandes réalisations industrielles à sodium liquide comme par exemple les réacteurs à neutrons rapides de type Phenix ou Superphenix. En effet, si une forte amplification d'un champ magnétique résiduel avait lieu dans un réacteur, elle serait alors accompagnée de forces électromagnétiques, pouvant générer par exemple des instabilités hydrodynamiques indésirables ou des pertes de charges supplémentaires. De façon à prévenir un tel phénomène, plusieurs campagnes de mesures ont été menées à partir des années 80 sur les deux réacteurs français et sur le réacteur russe BN600. Jusqu'à présent, aucun effet dynamo n'a été détecté. Toutefois, le coeur du réacteur n'a jamais fait l'objet de mesures magnétiques, de par son environnement hostile aux appareils de mesures (hautes températures, flux neutronique).

Cependant, suite à un comportement anormal répété du réacteur Phenix en cours de cycle d'exploitation entre 1989 et 1990, les exploitants du réacteur ont sollicité la présente étude, destinée à appréhender l'éventualité d'un effet dynamo dans la région du coeur, de façon à estimer son rôle concernant les observations relevées. En particulier, dans le cas d'une telle occurrence, il importait de calculer les forces électromagnétiques associées, de façon à déterminer si elles pouvaient engendrer un mouvement latéral des assemblages composant le coeur.

Le coeur du réacteur Phenix présente à priori au moins trois caractéristiques favorables à l'effet dynamo. La première est une valeur suffisamment élevée du nombre de Reynolds magnétique (de l'ordre de la trentaine). La seconde est la présence d'une forte hélicité du champ de vitesse dans le coeur. La troisième est la présence d'une enceinte ferromagnétique entourant le coeur. De façon à déterminer si la coïncidence de ces trois facteurs est suffisante pour amplifier un champ magnétique résiduel, une approche de type analytique a été menée.

## **I.2- Etude de stabilité temporelle (Deuxième Partie)**

En décomposant le champ magnétique en séries de Fourier et en effectuant une étude de stabilité temporelle, il a été montré que, dans la plage de fonctionnement (en température et en débit) du réacteur, un effet dynamo est improbable si les assemblages composant le coeur sont fabriqués en acier austénitique.

En revanche, si un nombre suffisant d'assemblages (de l'ordre de 8%) sont fabriqués en acier ferromagnétique, alors l'augmentation en moyenne dans le coeur de la perméabilité magnétique suffit à dépasser le seuil critique en terme de Reynolds magnétique au-delà duquel il y a effet dynamo. Or, lorsque le réacteur Phenix a eu le comportement anormal relevé entre 1989 et 1990, le coeur comportait environ 10% d'assemblages ferromagnétiques. Par conséquent, le nombre d'assemblages ferromagnétiques présents dans le coeur de Phenix était, en première approximation, suffisant pour qu'il puisse y avoir amplification spontanée d'un champ magnétique résiduel (d'origine terrestre ou autre).

Cependant, l'hypothèse de répartition en moyenne dans le coeur de la perméabilité magnétique étant éloignée de la réalité, une seconde approche prenant en compte la distribution discrète de perméabilité magnétique a été menée.

### **I.3- Modélisation de l'effet dynamo cinématique par la méthode des Eléments Finis. Application au RNR (Troisième partie)**

L'équation de l'induction qui décrit l'évolution temporelle du champ magnétique en tout point de l'espace a été modélisée par la méthode des Eléments Finis. Le choix de cette méthode provient essentiellement de son aptitude à représenter des structures complexes telles que le coeur, ce dernier étant composé d'une centaine d'assemblages. Pour des raisons de commodité numérique, et en particulier pour pouvoir prendre en compte la distribution discrète et hétérogène de propriété électromagnétique des assemblages, le problème a été décrit en potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique.

Plusieurs tests ont été réalisés, pour des configurations électromagnétiques simples (fil parcouru par un courant, déformation de champ magnétique par un disque conducteur tournant) et pour des configurations d'écoulement dynamo connues (Ponomarenko, Gailitis).

Des simulations ont été réalisées concernant un coeur homogène comprenant 1, 7, jusqu'à 61 assemblages tous austénitiques. Aucun effet dynamo n'a été observé. Cependant, les résultats montrent une tendance à l'amplification du champ magnétique en fonction du nombre croissant d'assemblages. Pour 61 assemblages, correspondant à un rapport d'échelles entre la structure hydraulique et la structure du coeur égal à 9, on observe la mise en place d'une structure magnétique à l'échelle du coeur. Cependant, une extrapolation quadratique montre qu'il faudrait un rapport d'échelles entre les structures magnétique et hydraulique égal à 35 pour qu'un effet dynamo soit possible, ce qui représente plus de trois fois la taille du coeur de Phenix. La simulation directe montre donc qu'un effet dynamo est improbable dans le coeur de Phenix, lorsque celui-ci est composé d'assemblages austénitiques. Ce résultat est cohérent avec l'approche suivie en deuxième partie.

Une simulation a ensuite été réalisée concernant un coeur hétérogène, comprenant 91 assemblages dont 17 ont chacun une perméabilité 100 fois plus grande que celle du reste du coeur. Pour un champ magnétique initial uniforme, on observe une amplification de celui-ci uniquement dans les assemblages ferromagnétiques. Un effet dynamo localisé au voisinage des assemblages ferromagnétiques a donc été observé. Les forces électromagnétiques associées sont elles aussi localisées dans les assemblages ferromagnétiques. Elles sont essentiellement latérales. Leur répartition est axisymétrique pour les assemblages ferromagnétiques à l'intérieur du coeur. Lorsque ceux-ci sont placés en périphérie du coeur, la répartition des forces y est non axisymétrique. Il en résulte un écartement probable de ces derniers.

## II- Perspectives

La présente étude a donc montré que la probabilité pour qu'un effet dynamo apparaisse dans le coeur du réacteur Phenix n'est pas nulle. Cet effet dynamo repose, en plus de la caractéristique hélicitaire de l'écoulement et de la propriété conductrice (électriquement) du sodium liquide, sur l'aspect hétérogène de la répartition de perméabilité magnétique dans le coeur.

La double approche analytique et numérique directe donne des résultats cohérents l'une vis-à-vis de l'autre. Sur le plan théorique, il est possible de montrer que pour une conductivité électrique ou une perméabilité magnétique non homogène, des termes sources supplémentaires apparaissent, pouvant donner lieu à un effet dynamo.

Cependant, plusieurs types d'incertitudes persistent:

- En effet, le peu de pas de temps qu'il a été possible de simuler dans le dernier calcul ne permet pas de conclure définitivement sur un effet dynamo. Il conviendrait pour s'en assurer de modéliser moins d'assemblages sur un temps plus long.
- De plus, la connaissance de l'écoulement de sodium dans un assemblage à 217 aiguilles est approximative.
- Enfin, la prise en compte de la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse n'a pas été considérée.

Pour conclure, la modélisation fine de l'effet dynamo dans le coeur d'un réacteur nucléaire, compte-tenu des moyens informatiques actuels et du rapport d'échelles entre la structure du coeur et celle de l'aiguille, restera hors de portée des ordinateurs pendant encore longtemps. Il est même probable que d'autres filières énergétiques soient mises en place avant que les ordinateurs aient la capacité suffisante pour réaliser une telle modélisation. Il convient donc de choisir à présent d'autres moyens d'expertises pour évaluer la probabilité d'effet dynamo dans le coeur. En particulier des mesures de champ magnétique en fonction de la puissance du réacteur seraient intéressantes. Les capteurs pourraient être disposés in-situ s'ils supportent à la fois haute température et flux neutronique. Ils pourraient également être disposés à l'extérieur de la cuve, selon un quadrillage tridimensionnel précis, de façon à restituer, après une analyse de type méthode inverse, la distribution interne du champ magnétique.

# Références

Aleman A. & Marty Ph., "L'étude des perturbations magnétiques au voisinage des pompes secondaires de Superphénix", 1er rapport INPG-LEGI / EDF-CLÉ (1995).

Benton, E.R., "Kinematic dynamo action with helical symmetry in an unbounded fluid conductor", *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **12**, 313 (part 1) et **12**, 345 (part 2), (1979).

Berger M.A., Field G.B., "The topological properties of magnetic helicity", *J. Fluid Mech.*, **147**, 133-148 (1984).

Berton R., "Magnétohydrodynamique", Masson (1991).

Bevir M.K., "Possibility of electromagnetic self-excitation in liquid metal flows in fast reactors", *J. of the British Nuc.Eng.Soc.*, Vol.12, n°4, 455-458 (1973).

Bloxham J. & Gubbins D., "The secular variation of Earth's magnetic field", *Nature* **317** (1985)

Bullard, E.C., Gellman, H., "Homogeneous dynamo and terrestrial magnetism", *Phil. Trans. Roy. Soc. A***247**, 213-78 (1954).

Bullard, E. C., "The Stability of a Homopolar Dynamo", *Proc. Camb. Phil. Soc.* **51**, 744-760 (1955)

Busse, F.H., Müller U., "The homogeneous dynamo: an analytical model and a planned experimental demonstration", *Proc. 2nd int. conf. on Energy transfer in MHD flows, Aussois*, 149-163, (1994).

Busse, F.H., Müller U., Stieglitz R., Tilgner A., "An experimental investigation of the homogeneous dynamo-effect", *Document KFK*, (1995).

Busse, F.H., Müller U., Stieglitz R., Tilgner A., "A two-scale homogeneous Dynamo an extended analytical model and an experimental demonstration under development", *14th Int. Riga Conf. on MHD* (1995).

Cardin P., Zelvelder M., "Le secret de la dynamo terrestre bientôt dévoilé?", *La Recherche*.**251**, **24**, pp 212-214, (1993).

Cook, A. E. and Roberts, P. H., "The Rikitake Two-disc-dynamo System", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **68**, 547-569 (1970).

Courtillot V., Le Mouél J.L., "L'étude du champ magnétique de la Terre", *La Recherche* n°59 (1975).

Cowling T. G. "The magnetic field of sunspots" *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **94**, 39-48 (1934).

Cowling T. G., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **10**, 129 (1957).

Cox A. "Geomagnetic reversals", *Science* **163**, 237-245 (1969)

- Cox A., "Plate Tectonics and Geomagnetic Reversals", Freeman (1973).
- Delcourt J.J., "Magnétisme Terrestre", Masson (1990).
- Durand E., "Magnétostatique", Masson&Cie (1968).
- Ershov S. V., Malinetskii G. G., Ruzmaikin A. A., "A generalized two-disk dynamo model", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **47**, pp251-277 (1989).
- Frisch U., Pouquet A., Léorat J., Mazure A., "Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in mhd turbulence", *J.F.M.*, **68**, part 4, 769-778, (1975).
- Gailitis A., Karasev B.G., Kirillov I.G., Lielausis O., Ogorodnikov A.P., "The helical MHD dynamo", *Proc IUTAM*, Riga (1988).
- Gailitis A., "The helical MHD dynamo", *Topological fluid mechanics*, *Proc IUTAM*, Cambridge (1989).
- Gailitis A., Gerbeth G., "Generation Properties of a Laboratory MHD Dynamo Model", 14th Int. Riga Conf. on MHD (1995).
- Garnier, J., Werkoff, F., "Some of the MHD effects in liquid-metal fast breeder reactors", Beersheva (1984).
- Garnier J., "Synthèse et critique des travaux de l'Académie des Sciences Soviétique concernant les effets thermoelectromagnetohydrodynamiques dans les surgénérateurs", note technique NR (1986).
- Gilbert A., "Fast dynamo action in the Ponomarenko dynamo", *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **44**, 241 (1988).
- Glatzmaier G.A., "Numerical Simulations of Stellar Convective Dynamos. I. The model and Method", *J. of Comp. Phys.* **55**, 461-484 (1984).
- Glatzmaier G.A., "Numerical Simulations of Stellar Convective Dynamos. II. Field propagation in the convection zone", *The Astr. J.* **291**, 300-307 (1985).
- Glatzmaier G.A., Roberts P.H., "A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal", *Nature*, **377** (1995).
- Hide R., "Structural instability of the Rikitake disk dynamo", *Geophys. Res. Letters* **22**, n°9, 1057-1059 (1995).
- Hollerbach R. & Chris A.J., "Influence of the Earth's inner core on geomagnetic fluctuations and reversals", *Nature* **365** (1993).
- Inglis D. R., "Dynamo theory of the Earth's varying magnetic field", *Reviews of Modern Physics*, **53**, n°3 (1981).
- Ito K., "Chaos in the Rikitake two-disc dynamo system", *Earth and Planetary Science Letters*, **51**, 451-456 (1980).
- Ivers D.J., James R.W., "Extension of the Namikawa-Matsushita antidynamo theorem to toroidal fields", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **36**, 317-323 (1986).
- Jacobs J.A., "Geomagnetism", Vol.2, Academy Press (1987).

Kirko, I. M., Mitenkov, F.M., Barannikov, V.A. and al, "Observation of MHD phenomena in liquid metal of the primary loop of a BN-600 fast reactor at the Beloyarsk nuclear power plant", Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **257**, 861-63 [Sov. Phys. Dokl., **26**, 427] (1981).

Kirko, I.M., Kirko, G.E., Telichko, M.T., Sheinkman, A.G., "Experimental detection of the generation of a magnetic field liquid metal for magnetic Reynolds number much larger than unity", Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **266**, [Sov. Phys. Dokl., **27**, 10] (1982).

Kirko, I.M., Kirko, G.E., Sheinkman, A.G., Telichko, M.T., "On the existence of thermoelectric currents in the BN-600 reactor of the Beloyarsk atomic power plant", Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **266**, 854 [Sov. Phys. Dokl., **27**, 873] (1982).

Kirko G. E., "Génération et auto-excitation d'un champ magnétique dans les milieux conducteurs", trad. CEA N° 2.722.0 (1984).

Kirko G. E., "Phénomènes électromagnétiques dans les grandes masses de métaux liquides", trad. CEA N° 2.722.1 (1984).

Kolm, H.H., Mawardi, O.K., "Hydromagnet: a self-generating liquid conductor electromagnet", J. of Applied Phys., **32**, 7, p.1296 (1961).

Lafay J., Menant B., Barroil J., "Local pressure measurements and peripheral flow visualization in a water 19-rod bundle compared with FLICA II B calculations: influenced of helical wire-wrap spacer system", ASME, August 11-13 1975.

Lagrange M., Maurel J., Cayol A., Clottes G., Ratier J.L., "Le bloc réacteur de Phénix", B.I.S.T CEA, **138**, juin 1969.

Laj C., Mazaud A., "Les inversions du champ magnétique terrestre", Les clés du CEA (1986).

Léorat J., Pouquet A., Frisch U., "Turbulence MHD développée et génération de champ magnétique", J. Phys., **41**, 359-369 (1980).

Léorat J., "L'effet dynamo et le champ magnétique solaire", extrait des comptes-rendus de l'Ecole de Goutelas, D. Benest et C. Froeschlé Editeurs (1990).

Léorat, J., "Numerical simulation of cylindrical dynamos: scope and method", 7th Beer Sheva Int. Seminar on MHD flows and turb., Israël (1993).

Léorat J., "Linear dynamo simulations with time-dependant helical flows", Proc. 2nd int. conf. on Energy transfer in MHD flows, Aussois, 165-176, (1994).

Lehnert B., Ark. Fysik. **13**, 10, 109 (1957)

Marty Ph., Ajakh A., Thess A., "Magnetic fields in fast breeder reactors: new results on thermoelectricity and dynamo effect", 7th Beer Sheva Seminar, Jerusalem, Israel (February 14-18, 1993).

Massé, P., "Modelling of continuous media methodology and computer aided design of finite element programs", IEEE Trans. Mag., **20**, n°5, 1885-1890 (1984).

Meneguzzi M., Pouquet A., "Turbulent dynamos driven by convection", J. Fluid Mech., **205**, 297-318 (1989).

Merrill R.T. & McFadden P.L., "Dynamo theory and paleomagnetism", J. Geophys. Res. **100**, 317-326 (1995).



- Moffatt, H. K., "Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids", Cambridge University Press, New York (1978).
- Moffatt, H. K., "A Self-Consistent Treatment of Simple Dynamo Systems", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **14**, 147-166 (1979).
- Moffatt, H.K., "Stretch, twist and fold", *Nature*, **341** (1989).
- Moreau, R., "Magnetohydrodynamics", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London (1990).
- Namikawa T. & Matsushita S., *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **19**, 395 (1970).
- Parker E.N., *Astrophys. J.*, **122**, 293 (1955)
- Parker R.L., *Proc. Roy. Soc.* (1966).
- Pierson E. S., "Electromagnetic Self-Excitation in the liquid-Metal Fast Breeder Reactor", *Nuclear Science and Engineering*, **57**, 157-163 (1975).
- Plunian F., Alemany A., Marty P., "Influence of magnetohydrodynamic parameters on electromagnetic self-excitation in the core of a fast breeder reactor", *Magnetohydrodynamics*, **3** (1995).
- Plunian F., Alemany A., Marty Ph., Massé Ph., "Direct Numerical modeling of kinematic Dynamo Effect. Application to the French fast breeder reactor Phenix core's geometry", *AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics* (sous presse).
- Plunian F. & Massé Ph., "An optimal preconditionned scheme for FE modelisation of kinematic MHD dynamo effect", *Eccomas96, European Community on Computational Methods in Applied Sciences* (1996).
- Plunian F., Marty Ph. Alemany A., "A more realistic model of the Rikitake dynamo", soumis à *NonLinearity*.
- Ponomarenko, Yu. B., "On the theory of hydromagnetic dynamo", *Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, USSR, **6**, 47-51 (1973).
- Priest E. R., "Solar Magnetohydrodynamics", *Geoph. and Astr. Monographs*, D. Reidel Pub. Comp., (1982).
- Prudhon P., Chevalier P., Alemany A., Marty P., "Superphenix between industry and research: MHD experiments", *Proc. 2nd int. conf. on Energy transfer in MHD flows, Aussois*, 193-202, (1994).
- Rädler K.\_H., Seehafer N., "Relations between helicities in mean-field dynamo models", *Topological Fluid Mechanics Proc. of the IUTAM Symp. Cambridge UK*.
- Rikitake, T., "Oscillations of a system of disk dynamos", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54**, 89-105 (1958).
- Roberts, G.O., "Spatially periodic dynamos", *Phil. Trans. R. Soc. London*, **A266**, 535 (1970).
- Roberts G.O., "Dynamo action of fluid motions with two-dimensionnal periodicity", *Phil. Trans. R. Soc. London*, **A271**, 411, (1972).

- Roberts P.H., "Dynamo Theory", *Dynamique des fluides astrophysiques*, Les Houches, session XLVII, (1987).
- Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D., "Helicity, Linkage and Dynamo Action", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **16**, 73-82, (1980).
- Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D., Shukurov A., "Hydromagnetic screw dynamo", *J. Fluid Mech.*, **197**, 39-56 (1988).
- Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D., Solov'ev, A.A., Shukurov A., "Couette-Poiseuille flow as a screw dynamo", *Magnitnaya Gidrodinamika*, B1T, 9-14 (1989).
- Salingaros N.A., "A classification of Magnetohydrodynamic Generators with Cylindrical Symmetry", *Europhys. Lett.* **24**, 467-472 (1993).
- Salingaros N.A., "A description of self-exciting dynamos in Cartesian and cylindrical geometries", *Phys. Letters A*, **185**, 201-205 (1994).
- Scheinkman A. G., Telichko M. T., Drozdenko V. A., Kupnyi V. I., "Etude des phénomènes thermo-hydrodynamiques au cours de l'exploitation du réacteur BN-600 de la centrale nucléaire de Beloyarsk", non daté, trad. 2.724-8 Z / FA
- Schmitt D., "The solar dynamo", *IAU Symposium n°157*, Postdam (1992).
- Shercliff J.A., "A textbook of MHD", *Permagon Press* (1965).
- Steenbeck M., Kirko I.M., Gailitis A., Klawina A.P., Krause F., Laumanis I.J., Lielausis O.A., "An experimental verification of the  $\alpha$ -effect", *Monats. Dt. Akad. Wiss.*, **9**, 716-9 (1967).
- Steenbeck M., Krause F., *Z. Naturforsch.*, **21a**, 1285 (1966)
- Steenbeck M., Krause F., Rädler K.H., *Z. Naturforsch.*, **21a**, 369 (1966)
- Valet J.P. & Meynadier L., "Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years", *Nature* **366**, 234-238 (1993).
- Weiss N.O., *Proc. Roy. Soc.* (1966).
- Werkoff, F., Garnier, J., "Observation of magnetic field generation and distorsion in the Phenix liquid-metal fast breeder reactor", *5th Beer Sheva Seminar*, Jerusalem, Israel (1987).
- Zeldovitch Ya. B., *Sov. Phys. JETP* **4**, 460 (1957).
- Zeldovitch Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D., "Magnetic fields in astrophysics", *Gordon & Breach science publishers*, New York (1983).

# Bibliographie supplémentaire

Albanese R., Rubinacci G., "Formulation of the eddy-current problem", IEE Proc., **137**, Pt.A, N°1 (January 1990).

Batchelor G.K., "The theory of homogeneous turbulence", Cambridge Univ. Press (1953).

Biro, O. and Kurt P., "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents", IEEE Trans. Mag., **25**, n°4 (1989).

Bossavit, A., Planchard, J., "On the dynamo effect", rapport bulletin EDF de la DER série C, (1984).

Bovay-Rhor A., "Les caprices de la toupie Terre", EPFL, Géo-modèle, (7 mars 1989).

Brandenburg A., Nordlund A., Pulkkinen P., Stein R. F., Tuominen I., "3-D simulation of turbulent cyclonic magneto-convection", Astron. Astrophys., **232**, 277-291 (1990).

Buell J.C., "A hybrid numerical method for three-dimensional spatially-developing free-shear flows", J.C.P., **95**, 313-338, (1991).

Bullard, E.C., Gubbins, D., "Generation of magnetic fields by fluid motions of global scale", Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, **8**, 43-56, (1977).

Busse, F.H., "Generation of magnetic field by convection", J.F.M., **57**, part 3, pp 529-544, (1973).

Busse, F.H., "A model of the geodynamo", Geophys. J. R. astr. Soc., **42**, pp 437-459, (1975).

Busse, F.H., Miin S.W., "Spherical dynamos with anisotropic alpha-effect", G.A.F.D., **14**, pp 167-181, (1979).

Busse, F.H., "Dynamo theory of planetary magnetism and laboratory experiments", Physikalisches Institut Univ Bayreuth (rapport non daté).

Chen P., Milovich, J.L., "An explicit solution for static unbounded helical dynamos", Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., **30**, 343-353 (1984).

Childress, S., Collet, P., Frisch, U., Gilbert, A.D., Moffatt, H.K., Zaslavsky, G.M., "Small diffusivity dynamos and dynamical systems", Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, **52**, 263-270, (1990).

Childress, S., "Fast dynamo theory", Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas, 111-147, Kluwer Academic Publishers, (1992).

Csendes Z.J., Weiss J., Hoole S.R.H., "Alternative vector potential formulation of 3D magnetostatic field problems", IEEE Trans. Mag., **18**, 367-372 (1982).

Dudley M. L., James R.W., "Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows", Proc. R. Soc. Lond., A **425**, 407-429 (1989).

Freedman & Robertson, J. of Chem. Phys. **34**, n°3 (1961).

Freiberg J., Laffont G., "Magnetic field due to thermoelectric currents in a fast breeder reactor", Proc. 2nd int. conf. on Energy transfer in MHD flows, Aussois, 187-192, (1994).

Gailitis A., "Self-excitation conditions for a laboratory model of a geomagnetic dynamo", Magnetohydrodynamics, **3**, n°3, 45-54, (1967).

Gailitis, A., "Self-excitation of a magnetic field by a pair of annular vortices", Magnitnaya Gidrodinamika, **6**, 1, 19-22 (1970).

Gailitis A., Freiberg Y.: "Theory of a helical MHD dynamo" Magnit. Gidrodin., n°2 (1976).

Gailitis, A., Freiberg, Ya., "Magnetic field due to thermoelectric currents in a fast reactor", Magnitnaya Gidrodinamika, **4**, 96-100 (1992).

Gailitis A., "Magnetic field generation by some axisymmetric flows", Proc. 2nd int. conf. on Energy transfer in MHD flows, Aussois, 177-186, (1994).

Galloway D., Proctor M.R.E., "The kinematics of hexagonal magnetoconvection", G.A.F.D., **24**, 109-136, (1983).

Galloway D., Frisch U., "A numerical investigation of magnetic field generation in a flow with chaotic streamlines", G.A.F.D., **29**, 13-18, (1984).

Galloway D., Frisch U., "Dynamo action in a family of flows with chaotic streamlines", G.A.F.D., **36**, 53-83, (1986).

Gilbert A., "Magnetic field evolution in steady chaotic flows", Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **339**, 627-656 (1992).

Gilbert A. D., Bayly B.J., "Magnetic field intermittency and fast dynamo action in random helical flows", J. Fluids Mech., **241**, 199-214 (1992).

Gubbins D. & Sarson G., "Geomagnetic field morphologies from a kinematic dynamo model", Nature **368** (1994).

Herzenberg A., "Geomagnetic dynamos", Phil. Trans. Roy. Soc. London A, **250**, 543 (1958).

Hide R. "On the magnetic flux linkage of an electrically-conducting fluid", Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, **12**, 171-176 (1979).

Hide R. "Dynamo theorems", Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, **14**, 183-186 (1979).

Hide R., "The topographic torque on a bounding surface of a rotating gravitating fluid and the excitation by core motions of decadal fluctuations in the Earth's rotation", Geophys. Res. Letters **22**, 961-964 (1995).

Jousselin, F., Alemany, A., Werkoff, F., Marty, Ph., "MHD induction generator at weak magnetic Reynolds number", Eur. J. Mech. B/Fluids, **8**, part 1, n°1, 23-39, part 2, n°4, 327-350 (1989).

Klapper I., "Kinematic fast dynamo action in a time-periodic chaotic flow", *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas*, 3-28 (1992).

Koide S., "3-Dimensionnal Simulation of Dynamo Effect of Reversal Field Pinch", *J. Phys. Soc. Japan*, **59**, n°11, 3952-3961 (1990).

Landau L. et Lifchitz E. "Physique théorique" T. VII (1971).

Léorat J., "La turbulence MHD hélicitaire et la génération des champs magnétiques à grande échelle", rapport de thèse Obs. Paris-Meudon (1975).

Léorat J., Pouquet A., Frisch U., "Fully developed MHD turbulence near critical magnetic Reynolds number", *J. Fluid Mech.*, **104**, 419-443 (1981).

Lielausis O., "Dynamo theory and liquid metal MHD experiments", *The cosmic dynamo*, IAU-Symposium 157, Postdam Germany (1992).

Lowes, F.J. & Wilkinson, I. "Geomagnetic dynamo: a laboratory model", *Nature*, 198, 1158-60 (1963).

Lowes, F.J. & Wilkinson, I. "Geomagnetic dynamo: an improved laboratory model", *Nature*, 219, 717-18 (1968).

Moffatt, H.K., "On fluid flow induced by a rotating magnetic field", *J. Fluid Mech.*, **22**, 521-528 (1965).

Moffatt, H.K., "Turbulent dynamo action at low magnetic Reynolds number", *J. Fluid Mech.*, **41**, 435-452 (1970).

Moffatt, H.K., "Liquid metal MHD and the geodynamo", *Proc. IUTAM Symposium on liquid metal MHD*, Riga (1988).

Moffatt H.K., "Relaxation under Topological constraints", *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas*, 3-28 (1992).

Otto A., "Forced three-dimensional magnetic reconnection due to linkage of magnetic flux-tubes", *J. Geophys. Res.* **100**, 11863-11874 (1995).

Pouquet A., Frisch U., Leorat J., "Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect", *J.F.M.*, **77**, part 2, 321-354, (1976).

Proctor M.R.E., "Necessary Conditions for the MHD Dynamo", *G.A.F.D.*, **14**, 127-145, (1979).

Proctor M.R.E., "On Backu's Necessary Condition for Dynamo Action in a Conducting Sphere", *G.A.F.D.*, **9**, 89-93, (1977).

Reshetnyak M., Sokoloff D.D., Shukurov A., "Evolution of a magnetic blob in a helical flow", *Astron. Nachr.*, **312**, 1, 33-39 (1991).

Roberts, G.O., "Dynamo waves", *The application of modern physics to the Earth and Planetary interiors*, Wiley-interscience (1969).

Roberts P.H., "An introduction to MHD", Longmans (1967).

Roberts P.H., Loper D.E., "On the diffusive instability of some simple steady magnetohydrodynamic flows", *J. Fluid Mech.*, **90**, part4, 641-668 (1979).

Roberts P. H., Jensen T.H., "Homogeneous dynamos: Theory and Practice", Phys. Fluids B **5** (7) (1993).

Schnack D.D., Baxter D.C., Caramana E.J., "A Pseudospectral Algorithm for three-Dimensional Magnetohydrodynamic Simulation", J. of Comp. Phys. **55**, 485-514 (1984).

Schüssler M., "Flux tubes and dynamos", IAU Symposium n°157, Postdam (1992).

Shukurov A., Sokoloff D., "Dynamo action in a swirling jet", Proc. 2nd int. conf. on Energy transfer in MHD flows, Aussois, **1**, 135-137 (1994).

Tilgner A., Busse F.H., "Subharmonic dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity", Proc. R. Soc. Lond. A, **448**, 237-244 (1995).

Vainshtein S.I., "Simplest dynamo instability", Sov. Phys. JETP, **41**, n°3 (1976).

Vladimirov V.A., Moffatt H.K., "On general transformations and variational principles for the magnetohydrodynamics of ideal fluids. Part1- Fundamental principles", J. fluid Mech., **283**, 125-139 (1995).