

**PREMIERE PARTIE**

**Variations comparées du moment cinétique du noyau et du manteau**

## 1 FLUCTUATIONS DE LA LONGUEUR DU JOUR

### 1.1 Observations

L'axe de rotation de la Terre subit des mouvements de précession (de période 26000 ans) et de nutation (dont le principal terme est de période 18,6 ans) autour de la normale au plan de l'écliptique. Ces mouvements ainsi que les petites perturbations subies par le plan de l'écliptique du fait de l'attraction gravitationnelle des autres planètes sont décrits par les lois de la mécanique céleste qui permettent de calculer les éphémérides des différents astres. La non-rigidité de la Terre (en particulier l'existence d'un noyau fluide) complique cette description, qui reste imparfaite. Mais les astronomes ont mesuré, dans leurs observatoires, des écarts aux prévisions beaucoup plus importants que ces imperfections des modèles: la latitude astronomique, déterminée à partir des visées d'étoiles, varie; les étoiles sont observées dans le plan méridien du lieu avec un retard ou une avance par rapport à l'heure calculée avec l'hypothèse d'une vitesse angulaire de rotation de la Terre uniforme.

#### 1.1.1 Mouvement du pôle

Les variations de la latitude astronomique traduisent un déplacement du pôle instantané de rotation par rapport à l'écorce terrestre. En 1891, Chandler analysa ces fluctuations et mit en évidence deux périodes, respectivement de 12 et 14 mois. L'une est la période d'une oscillation forcée (par différents phénomènes saisonniers: fluctuations de la pression atmosphérique, variation du niveau des eaux souterraines,..), l'autre d'un mouvement propre (l'oscillation de Chandler). Dès 1899, un réseau de 5 observatoires (Service International des Latitudes) fut mis en place pour suivre le déplacement du pôle: les coordonnées ainsi calculées constituent l'une des plus longues séries géophysiques. L'amplitude de l'oscillation

de Chandler ( $\approx 5m.$ ) est légèrement plus importante que celle du terme annuel ( $\approx 3m.$ ) (Vondrak, 1985). Aujourd'hui l'utilisation de nouveaux instruments (interférométrie à très longue base et tirs lasers sur les satellites (LAGEOS)) a bien amélioré la précision de la détermination du pôle instantané: sa position est calculée tous les 5 jours avec une précision de 3 cm (Feissel, 1990). Ces mesures sont très en avance sur la théorie, qui n'explique ni l'excitation ni l'atténuation de l'oscillation de Chandler (Daillet, 1981). Nous étudierons (II.2.4) l'excitation éventuelle de cette oscillation par l'action de la pression associée aux mouvements à la surface du noyau.

### 1.1.2 Mesure des fluctuations de la durée du jour

Les mouvements orbitaux des planètes demeurèrent l'étalon de temps le plus précis jusqu'à l'apparition des horloges atomiques en 1955. La révolution de la lune autour de la Terre, phénomène astronomique rapide, joue un rôle essentiel dans la construction d'un temps uniforme précis auquel comparer la durée du jour (Morrison, 1979). Les observations d'occultation d'étoiles par la lune (Stephenson et Morrison, 1984) ont permis d'estimer la différence, de 1600 à nos jours, entre le temps des éphémérides et le temps UT1 défini par la rotation de la Terre (autrement dit, les fluctuations de la longueur du jour intégrées depuis l'époque choisie comme époque de référence). Avant le 16<sup>ème</sup> siècle, les données se limitent à des comptes rendus d'éclipses lunaires et solaires, mais le principe de calcul (estimation de la différence, de l'ordre de 4h au début de notre ère, entre UT1 et le temps des éphémérides, puis différenciation) reste le même. La qualité des données pour les époques antérieures à 1780 autorise tout au plus à évaluer une tendance linéaire (voir la figure (11) de Stephenson et Morrison (1984)). Des fluctuations de la longueur du jour de temps caractéristique 20 à 30 ans et de quelques millisecondes d'amplitude sont discernables depuis

1780. En raison même de la nature des observations (mesure d'un signal intégré dans le temps), l'estimation de l'amplitude d'une irrégularité est d'autant plus précise que celle-ci a duré plus longtemps. Ainsi, Lambeck (1980, p78) estime t-il que les données pour la période 1850-1923 permettent d'étudier les irrégularités de la longueur du jour de temps caractéristique supérieur à 10 ans, tandis que les observations effectuées après 1923 contiennent des informations sur des variations se produisant en cinq ans ou plus.

Depuis 1955, la situation a rapidement évolué. Les horloges atomiques (1955) ont donné une échelle de temps de référence indépendante des phénomènes astronomiques; les tirs laser sur des coins de cube déposés sur la lune (1970), puis l'observation de sources radio lointaines par interférométrie à très longue base (VLBI) (1971) ont permis de calculer la vitesse de rotation de la Terre de façon de plus en plus précise (Feissel, 1983) : Robertson et al. (1985) estiment que leur technique (VLBI) permet de décrire une variation de 0.5 ms de la durée du jour s'étant produite en moins de 24h (une session d'une heure suffisant à assurer une précision de 0.1 ms, c'est à dire à orienter la Terre dans l'espace à 5cm près (comptés à l'équateur)).

## 1.2 Ralentissement séculaire de la rotation de la Terre

Des observations astronomiques s'étendant sur près de 3000 ans permettent d'évaluer une tendance linéaire dans l'évolution de la rotation de la Terre: la longueur du jour  $T$  augmente d'environ 2 millisecondes par siècle. Ce phénomène est principalement attribué à un échange de moment cinétique entre la Terre et la lune. En raison de l'anélasticité du manteau de la Terre, le bourrelet équatorial créé par les forces de marée lunaires n'est pas exactement aligné dans la direction Terre-lune; ces forces exercent donc un couple de rappel sur la Terre. En vertu

du principe d'action et de réaction, le mouvement moyen de la lune est accéléré et la lune s'éloigne de la terre (de 5 cm par an), comme l'indique la loi de Kepler

$$n^2 \alpha_L^3 = G(M_T + M_L)$$

$\alpha_L$  est le demi grand axe de l'orbite lunaire,  $G$  la constante universelle de la gravitation;  $M_L, M_T$  sont respectivement les masses de la lune et de la Terre. Puisque la plupart des observations anciennes mettent en cause la lune, il faudra tenir compte de l'accélération  $\dot{n}$  de son mouvement moyen  $n$  autour de la Terre lors du dépouillement des données. Il est probable que  $\dot{n}$  et  $(\dot{T})_m$  (la partie du ralentissement séculaire due aux forces de marée) sont restés constants depuis 3000 ans (Lambeck, 1980 pp 339-340). Deux techniques récentes permettent d'estimer  $\dot{n}$  indépendamment des observations astronomiques anciennes: télémétrie laser entre la lune et différentes stations terrestres (Grasse; Mc Donald au Texas;...) et modélisation des forces de marée agissant sur des satellites compacts (STARLETTE, LAGEOS) poursuivis également par télémétrie laser. Christodoulis et ses collègues (1988) ont démontré l'excellent accord entre ces deux approches:

Télémétrie laser sur la lune  $\dot{n} = -24.9 \pm 1.0''/\text{siècle}^2$

Suivi de satellites artificiels  $\dot{n} = -25.3 \pm 0.6''/\text{siècle}^2$

Connaissant  $\dot{n}$ , il est possible d'estimer le ralentissement séculaire à partir des observations astronomiques anciennes. Mais, un modèle de marée permet également (Lambeck 1980, pp 334-340; Cazenave et Daillet, 1981) de calculer directement le ralentissement de la Terre du à ces forces. Le modèle de Christodoulis et coll. (1988) correspond à

$$(\dot{T})_m = 2.25 \pm 0.08 \text{ms}/\text{siècle} \quad (1)$$

Les observations astronomiques effectuées au cours du moyen-âge (Stephenson et Morrison, 1984) semblent ne pas pouvoir se concilier avec un ralentissement aussi rapide que (1).

Cependant, l'étude de l'orbite du satellite LAGEOS a permis de découvrir une variation du terme  $J_2$  d'un développement du champ de gravité terrestre (Yoder et coll., 1983; Rubincam et coll., 1984):

$$J_2 = -3 \cdot 10^{-11} \text{année}^{-1}$$

En supposant la conservation du volume total de la Terre, on en déduit (e.g., Mignard, 1986) une variation du moment principal d'inertie de la Terre C:

$$\dot{C} = \frac{2}{3} J_2 M a^2$$

a, rayon de la Terre. Une accélération de la rotation de la Terre lui est associée

$$\dot{T} = -0.52 \text{ms/siècle}$$

Yoder et coll. (1983) expliquent leur observation comme les conséquences du relèvement isostatique des terres de latitude élevée (Canada, Scandinavie, Sibérie, Antartique) libérées de la charge des glaciers qui s'y trouvaient il y a 18000 ans. Dans ce cas,  $J_2$  doit être resté approximativement constant ces trois derniers milliers d'années et il faut tenir compte de l'accélération de la rotation de la Terre que nous venons de calculer dans le bilan global. Finalement,

$$\dot{T} = 2.25 - 0.52 = 1.73 \text{ms/siècle} \quad (2)$$

Mignard(1986) et Christodoulis et coll. (1988) pensent qu'une telle valeur permet de rendre compte aussi bien des observations du moyen-âge que de celles de l'antiquité et refusent la description de Stephenson et Morrison (1984) qui proposaient une diminution du ralentissement séculaire moyen entre ces deux époques, et donc une accélération de la rotation de la Terre par un phénomène d'origine inconnue aux alentours de l'an mille. Nous ne chercherons donc pas à interpréter d'éventuelles variations à long terme (de constantes de temps égales à quelques centaines d'années) de la rotation de la Terre par des échanges de moment cinétique avec le noyau.

### 1.3 Fluctuations rapides (quelques mois à quelques années) de la longueur du jour

Les marées zonales provoquent des variations de la longueur du jour de périodes très bien déterminées (entre autres 18.6 ans, 182.62j, 27.56j, 13.66j) et dont l'amplitude peut être calculée théoriquement (Yoder, Williams et Parke, 1981; Capitaine, 1982 pp 172-187); en particulier, une variation de la longueur du jour importante (0.15 ms environ) est associée à la marée de période 18.6 ans. Les fluctuations d'origine atmosphérique sont plus irrégulières. Les modèles globaux de prévision atmosphérique permettent de calculer les variations du moment cinétique dus aux changements de vitesse des vents zonaux et, dans une moindre mesure, aux fluctuations de la pression (et donc du moment d'inertie de l'atmosphère) (Hide et coll., 1980). La correspondance entre les variations du moment cinétique de l'atmosphère et du manteau (Rosen et Salstein, 1983; Eubanks et coll., 1985) est spectaculaire. Cependant, dans le cadre de ce mémoire, nous aimerions savoir s'il reste des variations de court terme inexplicées du moment cinétique du manteau dont le noyau devrait être tenu pour responsable. En 1985, Eubanks et ses collègues affirmaient que la variation rapide de la longueur du jour observée entre 1978 et 1980 (leur figure 8) devait être attribuée au noyau. Mais, depuis, les variations très importantes de la longueur du jour survenues début 1983 ont été montrées être bien corrélées avec les variations du moment cinétique de l'atmosphère (e.g., Carter et coll., 1984) et associées à l'événement El-Niño qui affectait le système couplé Océan tropical Pacifique - atmosphère à cette époque. Les irrégularités de la longueur du jour associées aux oscillations australes (El-Niño) sont variables d'une année à l'autre; ce phénomène étend ainsi le spectre des irrégularités de la longueur du jour devant être attribuées à l'atmosphère (Eubanks et coll., 1986). En particulier, les variations de la longueur du jour entre 1978 et 1980, si elles ne sont pas associées

à un événement El-Niño stricto-sensu, sont fortement corrélées avec l'indice qui permet de le définir. D'autres phénomènes d'origine externe viennent compliquer la description (Lambeck et Cazenave, 1976): la stratosphère, qui n'était pas prise en compte dans l'évaluation du moment cinétique de l'atmosphère, est responsable d'irrégularités bisannuelles de la longueur du jour (Lambeck et Cazenave, 1974; Chao, 1989); les courants océaniques (en particulier la "grande dérive d'Ouest" autour de l'Antarctique) pourraient participer aussi à hauteur de 5% aux variations du moment cinétique des couches fluides externes (Wahr, 1988).

#### **1.4 Fluctuations de la durée du jour attribuées à une interaction noyau-manteau**

Ainsi, le noyau ne peut être, avec certitude, tenu pour responsable que des seules fluctuations de la longueur du jour de temps caractéristique in termédiaire (5 à 100 ans): l'évaluation de plus en plus précise du moment cinétique de l'atmosphère et des océans indique qu'il faut chercher ailleurs l'origine des variations du moment cinétique du manteau (voir par exemple la figure 4 de Rosen et Salstein (1983)) dans cette gamme de périodes. Feissel et Gavoret (1987), après avoir soustrait de leurs données de longueur du jour l'effet des marées zonales, ont utilisé un algorithme servant à l'étude des séries économiques pour séparer, entre 1965 et 1985, les variations sensiblement identiques d'une année à l'autre (variations dites saisonnières), irrégulières (associées à un phénomène El-Niño par exemple) et une tendance. La figure (1) reproduit leurs résultats.



Entre 1965 et 1985, la tendance peut se décrire comme une parabole:

$$T = T(1973) - 10^{-2}(t - 1973)^2$$

T compté en millisecondes et t en années

$$\frac{dT}{dt} = -2 \cdot 10^{-2}(t - 1973)$$

Pour étudier le rôle du noyau, il faut tenir compte du ralentissement séculaire ( $dT/dt$ ), de la rotation de la Terre, dont nous pouvons retenir ici une valeur approchée de 2 ms/siècle:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_s = 2 \cdot 10^{-2}$$

Finalement, nous pouvons retenir comme ordre de grandeur de l'accélération due aux interactions avec le noyau:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_n = -2 \cdot 10^{-2}(t - 1972)$$

En termes de couple

$$\Gamma = I_m \frac{d\Omega}{dt} = -I_m \frac{2\pi}{T^2} \frac{dT}{dt} = 4 \cdot 10^{16}(t - 1972) N.m.$$

$I_m = 7.2 \cdot 10^{37} kg m^2$ ,  $\Gamma$  couple exercé sur le manteau par des forces agissant entre noyau et manteau. Le couple  $\Gamma$  a augmenté linéairement d'environ  $4 \cdot 10^{16} N.m.$  par an depuis 1965 (voir aussi la figure (5) de Morrison (1979)).

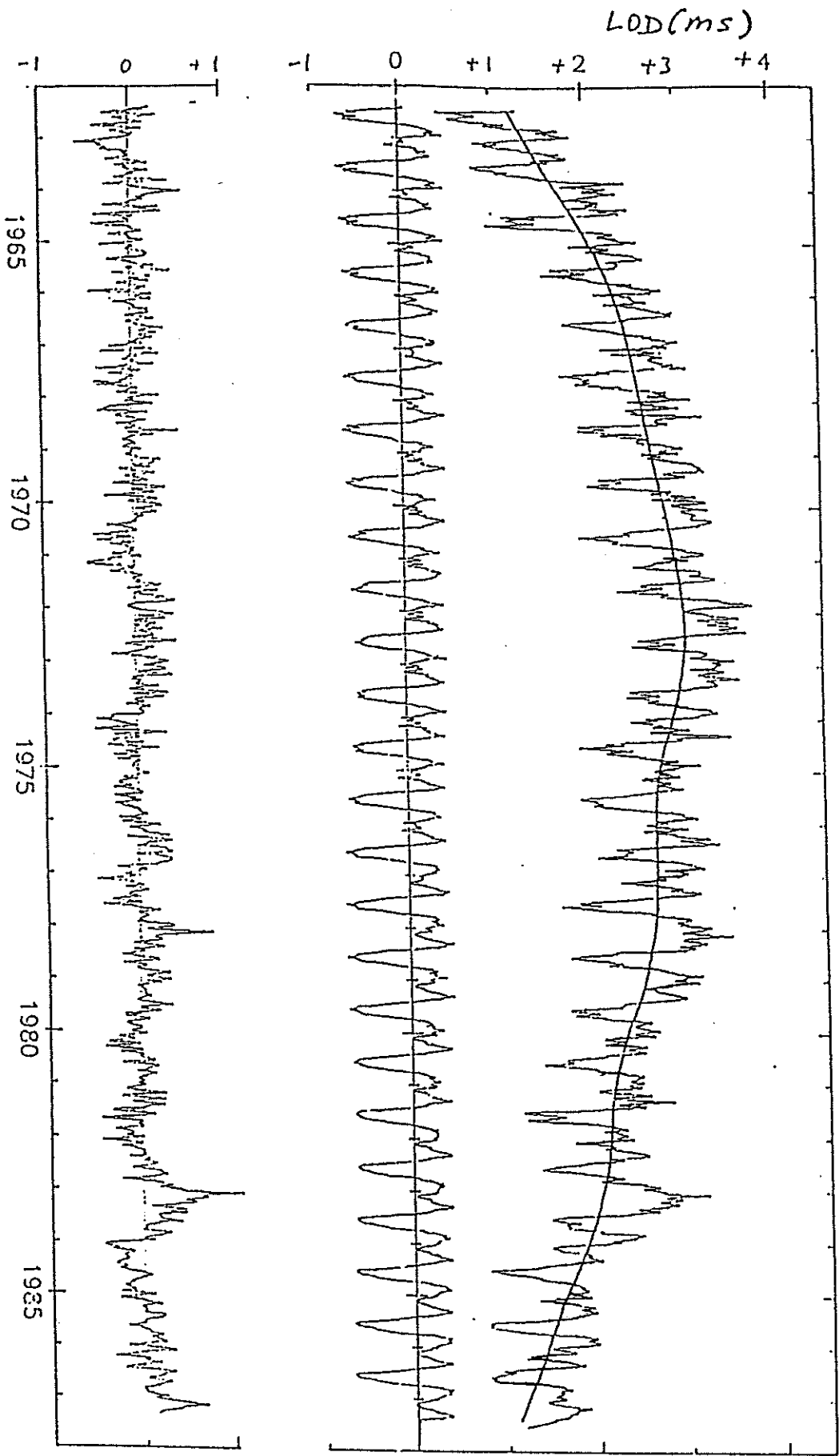


Figure 1: écart à 86400s de la longueur du jour, corrigé de l'effet des marées zonales; décomposition en une tendance et des termes saisonniers et irréguliers (Feissel et Gavoret, 1987).

## **2 MOUVEMENTS LENTS, DE GRANDE ECHELLE DANS LE NOYAU**

La partie principale du champ magnétique terrestre trouve son origine dans des courants électriques circulant dans la partie fluide du noyau de la Terre, composée de fer conducteur et liquide. Le fluide, en mouvement, coupe les lignes de force du champ magnétique; de nouveaux courants électriques sont induits comme lorsque l'on modifie la géométrie d'un circuit conducteur fermé placé dans un champ magnétique. Les variations temporelles du champ magnétique résultent d'une part de la dissipation ohmique des courants, d'autre part des mouvements du fluide conducteur. Dans ce chapitre, après un bref rappel de nos connaissances sur la variation du champ magnétique d'origine interne, j'explique pourquoi elle nous renseigne seulement sur les mouvements à la surface du noyau, puis j'expose et critique les hypothèses restrictives nécessaires pour déterminer le mouvement de façon unique: je développe en particulier les arguments en faveur d'un équilibre géostrophique entre accélération de Coriolis et pression à la surface du noyau. Je peux alors décrire les mouvements à la surface du noyau calculés par J.L. Le Mouél, C. Gire et G. Hulot au laboratoire de géomagnétisme de l'Institut de Physique du Globe. Enfin, au terme de cette longue approche, je propose une méthode pour évaluer le moment cinétique du noyau à partir d'un modèle de vitesse à la surface.

### **2.1 La variation séculaire du champ magnétique terrestre**

#### **2.1.1 Observation et description**

Près de 200 observatoires inégalement répartis à la surface du globe enregistrent les variations temporelles du champ magnétique de la Terre. En prenant une moyenne annuelle plus ou moins élaborée des mesures des éléments

du champ, on élimine une grande partie de la composante d'origine externe; ces moyennes sont les données de base permettant de décrire la variation séculaire (de constantes de temps 1 à 100 ans) du champ magnétique d'origine interne. Les enregistrements des observatoires permettent d'étudier la variation globale du champ au cours de la période 1900-1980 mais les données deviennent plus précises à partir de 1960: les observatoires sont plus nombreux, en particulier dans l'hémisphère Sud (voir la figure 2 de Langel et al., 1986). Les différents satellites POGO, à la fin des années 60, et surtout le satellite MAGSAT, qui mesurait les trois composantes du champ, ont permis une bonne description spatiale du champ (Gire, 1985; Cohen, 1989), mais ne sont pas restés suffisamment longtemps en orbite pour une étude de la variation séculaire (Langel et Estes, 1985).

De nombreuses études ont recherché des périodicités dans la variation du champ (Braginsky, 1984), mais seul un terme de 11 ans, associé au cycle solaire, semble clairement établi (Gavoret et al., 1986). Au détour d'une étude de ce signal d'origine externe, Courtillot, Ducruix et Le Mouél (1978) ont découvert l'une des principales caractéristiques de la variation séculaire: les sauts de variation séculaire. Les figures représentatives des variations (dérivées premières) des éléments du champ enregistrés dans des observatoires dispersés sur toute la surface du globe présentent de brutales ruptures de pente (Ducruix, Courtillot et Le Mouél, 1980). L'événement de 1969-70, le mieux documenté, fut associé à un regain d'énergie du champ de vitesse à la surface du noyau (Le Mouél, Gire et Madden, 1985); Le Mouél et al. (1981), et Backus (1983) ont proposé que ce phénomène et un extremum des fluctuations de la durée du jour aient une cause commune.

### 2.1.2 Modèles du champ et de sa variation: développement en harmoniques

On appelle modèle de champ  $\vec{B}$  d'origine interne un ensemble de coefficients  $(g_n^m, h_n^m)$  du potentiel géomagnétique  $V$ , développé en fonctions harmoniques sphériques

$$V = a \sum_{n=1}^N \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos\theta) \quad (1)$$

où  $\vec{B} = -\vec{\nabla}V$

$a$ , rayon de la Terre. De même, la variation temporelle  $\dot{\vec{B}}$  de  $\vec{B}$  sera décrite par une famille  $(\dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m)$ . Le développement (1) peut être prolongé à travers le manteau considéré comme isolant pour étudier l'évolution du champ à la surface du noyau. Mais la plupart des modèles de variation séculaire sont construits dans d'autres buts. Ainsi, un champ international de référence est-il établi tous les cinq ans et un modèle prévisionnel de variation séculaire pour les cinq années suivantes l'accompagne. Par exemple, le modèle de référence de variation séculaire pour l'intervalle 1985-1990, proposé en même temps que le modèle IGRF85, fut construit à partir de données recueillies entre 1980 et 1985, puis extrapolées; il ne doit pas être considéré comme représentatif de la variation séculaire observée en 1987.5. Plusieurs modèles ont été spécifiquement construits pour des études de champ au noyau (Hodder, 1981 ; Langel, Estes et Mead, 1982; Langel et al., 1986; Hurwitz et al., 1974); nous pourrions également envisager d'utiliser les modèles (Langel et Estes, 1985; Peddie et Zunde, 1987) qui s'appuient sur des données d'observatoire enregistrées au cours d'une période centrée sur l'année pour laquelle le modèle est censé décrire la variation séculaire.

Langel et ses coauteurs (1986) nous donnent une idée de la précision que nous pouvons espérer; ils limitent leurs modèles aux degrés  $N=5$  jusqu'en 1930,  $N=6$  entre 1930 et 1960, et  $N=8$  au delà. Langel et Estes (1985) ont montré (leur

figure (6)) qu'une succession de modèles de variation séculaire, proposés par différentes équipes suivant des méthodes variées, pour des dates échelonnées entre 1960 et 1980, rend bien compte, à travers leurs premiers coefficients, du saut de variation séculaire observé en 1970. Cependant, il serait préférable d'utiliser une série de modèles construits suivant la même procédure pour étudier l'évolution dans le temps de la variation séculaire; notre estimation, à différentes époques, du moment cinétique du noyau (2.5) repose ainsi en grande partie sur les coefficients  $(g_n^m, h_n^m)$  de Langel et al. (1986) avant leur interpolation par des fonctions splines; l'idéal serait de maîtriser le processus de construction de modèles pour pouvoir choisir les méthodes (lissage, compromis entre précision temporelle et spatiale) les mieux adaptées à chaque problème.

### 2.1.3 Cartes du champ à la surface du noyau

Bloxham et Gubbins (1985), Jackson (1989), Bloxham, Gubbins, et Jackson (1989), Bloxham et Jackson (1990) décrivent le champ magnétique à l'aide de cartes de la composante radiale du champ à la surface du noyau. Ils utilisent essentiellement des levés magnétiques par bateaux réalisés entre la fin du 17<sup>ème</sup> siècle et 1840 et des données d'observatoires pour le 20<sup>ème</sup> siècle. Dans leur méthode, le nombre de degrés de liberté ne se trouve plus limité par une troncation à un degré peu élevé d'un développement en harmoniques sphériques du potentiel mais par la minimisation d'une norme du champ à la frontière noyau-manteau; cela leur permet de réduire le phénomène de type Gibbs ("ringing") lié à un développement limité en harmoniques sphériques (voir la figure 6 de Bloxham et Jackson). Deux modèles successifs de champ permettent de décrire la variation séculaire (Bloxham, 1989). Au 20<sup>e</sup> siècle, leurs cartes montrent des structures (et surtout une évolution de ces structures, voir 2.2) que les modèles utilisant les

harmoniques sphériques ne résolvent pas; ces travaux devront encore être confrontés à d'autres études, d'autant plus que les polynômes choisis pour représenter les variations temporelles ne sont pas complètement satisfaisants (voir la figure 7 de Bloxham et Jackson). Néanmoins, ces travaux sont importants car ils permettent d'envisager l'étude du comportement du champ sur des constantes de temps longues; je me référerai souvent, dans la suite de ce mémoire, à des études menées à partir de ces cartes.

## **2.2 Variation séculaire du champ magnétique terrestre et mouvements à la surface du noyau**

L'approximation du manteau isolant permet de prolonger le champ magnétique mesuré à la surface de la Terre jusqu'à la surface du noyau. Pour connaître le champ à l'intérieur du noyau, il faudrait décrire la dynamo terrestre, c'est à dire le mécanisme par lequel les mouvements du fluide entretiennent les courants électriques et le champ magnétique. Mais dans le cas-limite du noyau infiniment conducteur, il n'y a pas de dissipation ohmique des courants électriques, et seuls les mouvements à sa surface participent à la variation du champ magnétique sortant du noyau. Cette hypothèse d'école ne permet pas d'étudier le champ sur de longs intervalles de temps ni à plus forte raison de comprendre l'existence d'un champ magnétique (l'estimation actuelle de la conductivité du noyau ( $3 \cdot 10^5 \text{ Sm}^{-1}$ ) correspond à un temps caractéristique de dissipation des courants électriques (et donc du champ magnétique) de l'ordre de 10000 ans, petit devant l'âge de la Terre, 4.5 milliards d'années), mais est susceptible d'expliquer les variations du champ sur des périodes courtes (quelques dizaines

d'années) devant ce temps caractéristique. Le traité de Fearn, Roberts et Soward (en particulier l'introduction, pp 63-105) (1988) présente de façon claire les idées physiques à la base de cette théorie.

La loi d'Ohm dans un corps en mouvement est conservée dans un repère se déplaçant avec le conducteur. D'un repère à l'autre le champ magnétique et le courant électrique sont invariants (pour les constantes de temps longues considérées ici); le champ électrique  $\vec{E}'$  dans un repère local animé de la vitesse  $\vec{u}$  s'écrit à partir du champ  $\vec{E}$  dans le repère de référence (voir Fearn et al. (1988), p 75 ou pour une autre approche Gubbins et Roberts (1987) p 18):

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}$$

Nous adopterons comme repère de référence un repère tournant avec le manteau et  $\vec{u}$  désignera la vitesse relative du fluide dans ce repère. La théorie dynamo repose sur le terme  $(\vec{u} \wedge \vec{B})$  qui crée la force électromotrice régénérant les courants électriques. La loi d'Ohm devient:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

Si le noyau est supposé infiniment conducteur ( $\sigma = +\infty$ ):

$$\vec{E} = -\vec{u} \wedge \vec{B} \quad (2)$$

La loi de Maxwell-Faraday  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  implique la continuité de la composante tangentielle  $\vec{E}_H$  du champ électrique, et donc de  $(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_r$ , à la traversée de la frontière sphérique noyau-manteau et permet de décrire l'évolution de la composante radiale  $B_r$  du champ magnétique à la base du manteau.

$$\begin{aligned} (\vec{E}_m)_H &= (\vec{E}_n)_H = -(\vec{u} \wedge \vec{B}_n)_H \\ -\left(\frac{\partial B_r}{\partial t}\right)_m &= (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_m)_r = (\vec{\nabla} \wedge (\vec{E}_m)_H)_r = -(\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}_n))_r \end{aligned}$$



Les indices m et n repèrent les champs respectivement dans le manteau et le noyau. A la surface du noyau,  $u_r = 0$  (condition de non-pénétration) et:

$$-\left(\frac{\partial B_r}{\partial t}\right)_m = \vec{\nabla}_H \cdot (\vec{u} B_{r,n}) \quad (3)$$

$B_r$  est identique de part et d'autre de la surface noyau-manteau puisque  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  et (3) s'écrit simplement

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\vec{\nabla}_H \cdot (\vec{u} B_r) \quad (4)$$

où  $B_r$  est le champ magnétique à la base du manteau. Cette équation peut paraître surprenante. A la surface du noyau, la condition de non-glissement ( $\vec{u}_H = \vec{0}$ ) complète la condition de non-pénétration ( $u_r = 0$ ), déjà utilisée, et combinée à l'équation (4), conduirait à  $\partial B_r / \partial t = 0$ . Roberts et Scott (1965) ont levé ce paradoxe en rappelant qu'à travers une couche limite attenante à la frontière noyau-manteau permettant d'assurer la condition de non-glissement,  $u_r$  et  $B_r$  sont continus puisque  $\vec{u}$  (ou  $\rho \vec{u}$ ,  $\rho$  densité) et  $\vec{B}$  sont à divergence nulle. Ainsi  $u_r$  reste nul à travers la couche limite et le champ de vitesse horizontal intervenant dans (4) doit être compris comme le champ de vitesse sous la couche-limite.

L'équation (4) est la pierre angulaire de toutes les déterminations des mouvements à la surface du noyau. Elle impose des contraintes à la géométrie de la variation séculaire et permet d'apprécier ainsi la validité de l'approximation du noyau infiniment conducteur. L'équation (2) et la loi de Maxwell-Faraday impliquent que le flux de champ magnétique à travers une surface  $\Sigma$  dont le périmètre se meut avec le fluide est conservé (Fearn et al., p 97):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (5)$$

Le théorème d'Alfvén se déduit de cette propriété: dans un conducteur parfait, un tube de flux, surface formée de lignes de force du champ magnétique s'appuyant sur une courbe matérielle fermée, reste constitué, au cours du mouvement, des mêmes particules, et son flux (c'est à dire le flux à travers une section quelconque du tube) est conservé. C'est pourquoi l'approximation du noyau infiniment conducteur est connue sous le nom d'hypothèse du flux gelé.

Intéressons nous à un point de la surface du noyau où  $B_r = 0$  :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\vec{\nabla}_H \cdot (\vec{u} B_r) = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_H B_r$$

$$\frac{dB_r}{dt} = 0$$

Les courbes  $B_r = 0$  sont transportées par le fluide et d'après (5) le flux de champ magnétique à travers les surfaces, que nous noterons désormais  $\Sigma_0$ , s'appuyant sur les courbes matérielles  $B_r = 0$  doit être conservé. En particulier, les surfaces de la frontière noyau-manteau (de rayon  $r=c$ ), où respectivement  $B_r < 0$  et  $B_r > 0$  sont limitées par les courbes  $B_r = 0$  et sont des surfaces  $\Sigma_0$ . L'expression

$$\frac{d}{dt} \int \int |B_r(r, \theta, \phi)| r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

s'annule donc en  $r=c$ . Hide (1978) proposa d'utiliser cette propriété pour déterminer le rayon du noyau. Appliquant cette méthode, Voorhies et Benton (1982) retrouvèrent la valeur du rayon du noyau donné par la sismologie avec une incertitude de seulement 50 km.

Les cartes de champ à la surface du noyau construites par Bloxham et Gubbins (1985) leur ont permis de vérifier la conservation du flux à travers la plupart des surfaces  $\Sigma_0$  mais leur estimation du flux, en 1969, à travers  $\Sigma_{BC}$ , la surface (dédoublée au début du siècle) limitée par une courbe  $B_r = 0$  et située dans une région au sud de l'Afrique et de l'Atlantique, est très différente de

leur estimation pour 1905 (voir leur figure (2)); la carte (figure 1) de la composante radiale du champ à la surface du noyau calculée à partir du modèle IGRF80, qui est particulièrement précis car construit à partir des données MAGSAT, permet de bien décrire cette surface  $\Sigma_{BC}$  en 1980. La violation de la contrainte du flux gelé, repérée par Bloxham et Gubbins, se décrirait comme une variation de flux, à travers  $\Sigma_{BC}$ , de 8 Mwb/an soit une forte contribution à la variation séculaire (environ  $10^3$  nT/an) sur 5% de la surface du noyau, dont l'équation (4) ne peut pas rendre compte. Bloxham et Gubbins (1985) ont également évalué le flux à travers  $\Sigma_{BC}$  à partir de leurs modèles de champ plus anciens (1715,1775,1842). Il n'y a pas de variation significative entre 1842 et 1905. La norme (c'est à dire une indication de la valeur typique de  $B_r$ , à la surface du noyau) des modèles de 1715 et 1775 est deux fois plus faible que celle des modèles récents; cette différence traduit la forte influence du lissage utilisé dans le calcul et interdit toute utilisation quantitative de ces modèles. Ainsi, seule la variation de flux entre les modèles de 1905 et 1969 pourrait traduire une diffusion localisée de champ. Les modèles de champ construits récemment par Bloxham et Jackson (1990) (voir la description de ce travail en 2.1) leur ont permis de préciser la variation au cours du 20<sup>e</sup> siècle du flux de champ magnétique à travers  $\Sigma_{BC}$ . Bloxham et Jackson ont repéré une diffusion particulièrement importante dans la première moitié du siècle en comparant les cartes de champ à la surface du noyau pour les années 1916 et 1948. Mais, Backus (1988) conteste l'utilisation des cartes de champ de Bloxham et Gubbins, dont il juge les détails peu fiables, comme test de l'hypothèse du flux gelé. Cette étude n'aurait d'ailleurs pas pu être menée à partir des modèles de variation séculaire calculés sous la forme de développements en harmoniques sphériques: Langel et al.(1986) affirment que leurs données ne leur permettent pas de pousser le développement au delà de l'ordre 6 avant 1960 alors que la description de  $B_r$  à travers  $\Sigma_{BC}$  nécessite

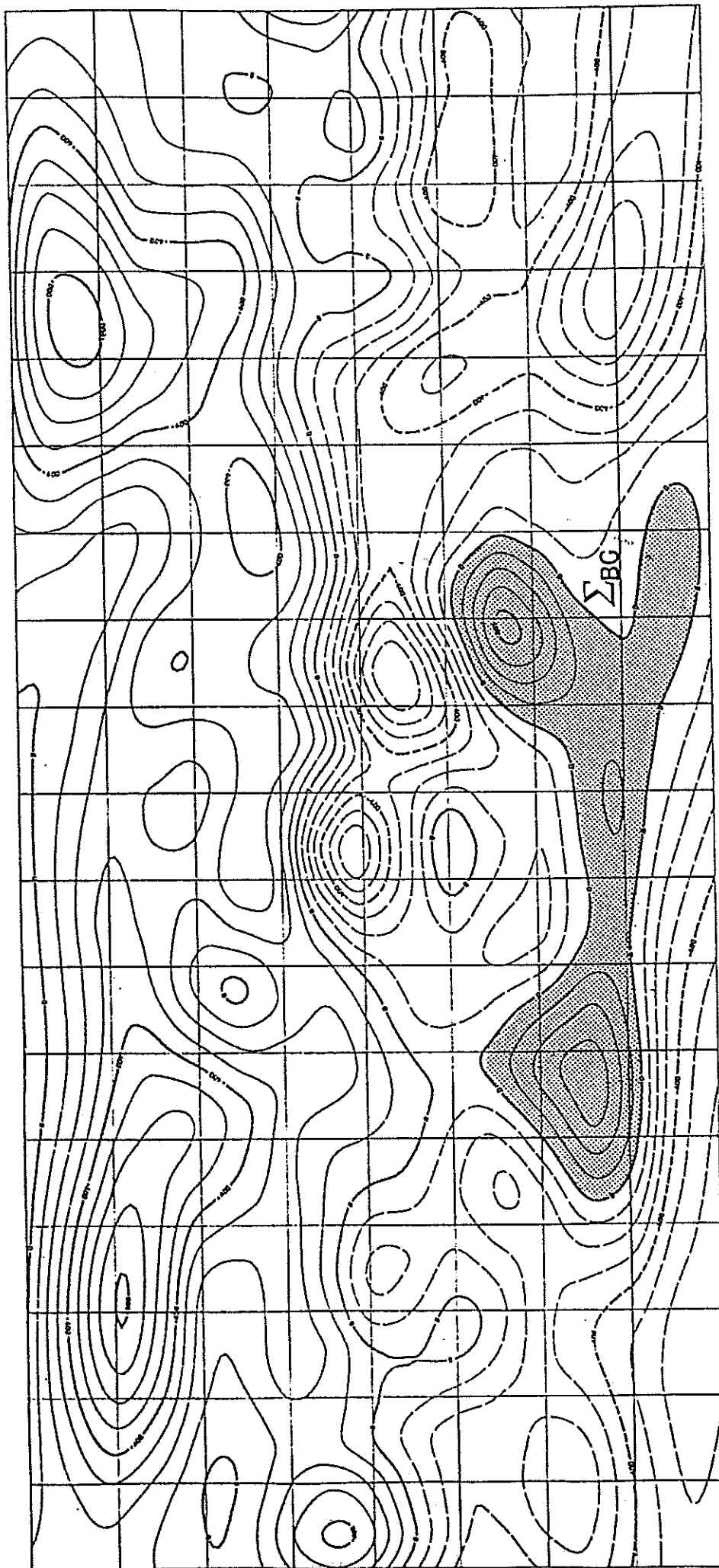


Figure 1: carte du champ à la surface du noyau, centrée sur le méridien de Greenwich, construite à partir du modèle IGRF80.  
équidistance des courbes:  $10^{-4}$  T.

des termes de degré et d'ordre environ 7. Benton, Estes et Langel (1987) limitent leur étude à l'intervalle 1978-1982; ils imposent à leur modèle de variation séculaire de respecter au mieux la contrainte du flux gelé, tout en conservant un bon accord avec les mesures de champ: ils parviennent à réduire la variation de flux à travers  $\Sigma_{BC}$  à 4 Mwb/an; c'est un demi-échec. La découverte de Bloxham et Gubbins, si elle devait se confirmer, remettrait en cause l'utilisation de l'approximation du flux gelé pour interpréter les variations du champ, même sur des périodes courtes (quelques dizaines d'années) devant le temps de dissipation des courants électriques, au moins dans certaines régions de la surface du noyau.

Si l'on tient compte de la conductivité finie, mais supposée uniforme, du noyau, l'équation (1), la loi de Maxwell-Faraday et la loi de Maxwell-Ampère permettent d'écrire

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_r = -\frac{\partial B_r}{\partial t} = -(\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}))_r + \frac{1}{\mu\sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{B})_r \quad (6)$$

et en particulier, la condition aux limites (3) (continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  entre le noyau et le manteau) devient

$$-\left(\frac{\partial B_r}{\partial t}\right)_m - (\vec{\nabla}_n \cdot (\vec{u} B_r))_n = \frac{1}{\mu\sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{B})_{r,n}$$

Le champ magnétique s'écrit comme somme d'un terme poloïdal  $\vec{B}_p$  et d'un terme toroïdal  $\vec{B}_t$  (voir Le Mouél, 1976 ou Gubbins et Roberts, 1987):

$$\vec{B}_p = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} p) \quad \vec{B}_t = \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} t)$$

L'identité (6) équivaut à une équation aux dérivées partielles gouvernant le paramètre  $p$  dans le noyau. Il resterait à spécifier la vitesse du fluide  $\vec{u}$ . Laissons de côté le terme où elle intervient. Alors (6) se réduit à:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta p \quad (7)$$

L'opérateur  $\Delta$  est le laplacien; cette équation, qui traduit la dissipation des courants électriques lorsque la dynamo n'est pas entretenue, a la même forme que l'équation de la chaleur. La dissipation ohmique équivaut à une "diffusion" de champ magnétique et l'équation (7) permet de calculer le temps caractéristique de cette diffusion. Les structures les plus fines du champ magnétique disparaissent plus vite que les termes de grande échelle (par exemple la partie dipôle) et l'on peut calculer un temps de diffusion pour chaque terme d'un développement en harmoniques en fonction de son degré et de son ordre; il faut pousser le développement de la composante radiale  $B_r$  du champ magnétique jusqu'au degré et à l'ordre 7 environ pour décrire ses variations spatiales à travers une région de la taille de  $\Sigma_{BC}$ ; le temps de diffusion de cette structure est d'environ 1000 à 2000 ans (pour une conductivité du noyau de l'ordre de  $3 \cdot 10^5 \text{ Sm}^{-1}$ ). C'est pourquoi il peut sembler légitime de négliger la diffusion de champ poloïdal lorsque l'on étudie les variations rapides du champ de grande échelle. L'équation (6) ne faisant intervenir que des termes poloïdaux, la violation de l'hypothèse du flux gelé observée à l'aplomb du sud de l'Afrique ne pourrait s'expliquer que par une forte dépendance radiale du scalaire poloïdal dans les couches externes du noyau. La théorie de ce phénomène reste à construire.

Bloxham et Gubbins (1985) ont interprété leur observation par une expulsion de "flux toroïdal". La partie toroïdale du champ magnétique est identiquement nulle dans le manteau isolant et son intensité, dans le noyau, ne peut pas être estimée à partir des observations. Le modèle numérique d'expulsion de flux, construit dans une géométrie plane, par Bloxham (1986) pour illustrer cette idée, ne fait pas en réalité intervenir un champ toroïdal, mais un champ de type poloïdal qui se trouve être initialement parallèle à la frontière avec le milieu isolant (configuration impossible à retrouver en géométrie sphérique). Ainsi ce champ peut pénétrer le milieu isolant. Mais l'équation (6) ne peut pas être

contournée: seule la partie poloïdale du champ intervient dans la variation séculaire à la surface du noyau. Et donc, contrairement à ce que propose Bloxham (1986), il n'est pas possible de calculer directement l'ordre de grandeur du champ toroïdal au sommet du noyau à partir de l'intensité de la diffusion de champ magnétique à la frontière noyau-manteau.

Braginsky (1984) nous permet d'écarter une autre explication d'une diffusion localisée de champ magnétique. Il observe que, dans (6), le terme de diffusion devient important si la vitesse du fluide varie rapidement, avec le rayon, près de la frontière noyau-manteau, car alors le champ induit varie lui aussi rapidement. Il définit une épaisseur de fluide  $\delta$  à l'intérieur de laquelle le champ magnétique induit par les mouvements du fluide peut diffuser jusqu'à la surface du noyau et participer à la variation séculaire pour une période caractéristique donnée. Braginsky montre que l'on peut rendre compte de la diffusion en définissant la vitesse intervenant dans l'équation (4) comme une moyenne pondérée de la vitesse dans la couche  $(c - \delta, c)$  plutôt que comme la vitesse à la surface du noyau; dans la mesure où une équation de type (4) reste valable, le raisonnement menant au théorème de conservation du flux à travers les surfaces  $\Sigma_0$  s'applique.

C. Gire et G. Hulot ont estimé l'effet d'une diffusion localisée à la surface du noyau sur les modèles de champ de vitesse  $\vec{u}$  construits à partir de l'équation (4). Leurs travaux démontrent que les modèles de vitesse sont complètement insensibles à une telle perturbation. En l'absence de diffusion, l'équation (4) permet d'assimiler les constantes de temps de la variation séculaire  $\partial \vec{B} / \partial t$  à celles du mouvement  $\vec{u}$  (Le champ  $\vec{B}$  lui-même varie peu en quelques dizaines d'années). Une éventuelle diffusion rapide de champ magnétique remet en cause ce genre de raisonnement, particulièrement pour ce qui concerne les longues périodes (100

ans et plus).

## 2.3 Informations a priori sur le mouvement à la surface du noyau

### 2.3.1 Indétermination des mouvements

Un modèle de variation séculaire et l'équation (4) ne peuvent pas suffire à calculer un mouvement  $\vec{u}$  à la surface du noyau. Il y a déjà une indétermination théorique; Roberts et Scott (1965) ont mis en évidence une famille de mouvements  $\vec{u}$  à la surface du noyau n'induisant aucune variation séculaire  $\partial B_r / \partial t$

Par exemple 
$$\vec{u} = \lambda(B_r)(\vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}_H B_r) \quad (8)$$

$\vec{e}_r$ , vecteur unitaire radial et  $\lambda(B_r)$  fonction quelconque. Alors:

$$\vec{\nabla}_H \cdot (\vec{u} B_r) = 0$$

et aussi (équation de conservation de la masse):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

S'il existe un champ de vitesse compatible (au sens de l'équation (4)) avec un modèle donné de variation séculaire, alors une infinité de champs de vitesse peuvent tout aussi bien convenir. Backus (1968) a formalisé cette indétermination;  $\vec{u} B_r$  peut s'écrire comme somme d'un terme poloïdal et d'un terme toroïdal; la variation séculaire du champ magnétique ne donne d'indications que sur la partie poloïdale.

Outre cette indétermination théorique, les modèles de variation séculaire ne décrivent, et encore imparfaitement, que les structures de grande échelle ( $10^\circ$  de résolution spatiale) évoluant lentement (constante de temps de l'ordre de 10 ans). Ces limitations des modèles de variation séculaire sont à la source d'une



seconde indétermination que nous pouvons qualifier de "pratique". Aussi, des informations (ou des hypothèses) a priori permettant de contraindre la géométrie et les variations temporelles du champ de vitesse  $\vec{u}$  sont elles nécessaires.

### 2.3.2 Contraintes sur les variations temporelles et spatiales du champ de vitesse

Kahle, Vestine, et Ball (1967), Kahle, Ball, et Vestine (1967), Madden et Le Mouél (1982) et Gire, Le Mouél, et Madden (1986) ont cherché à représenter la variation séculaire du champ magnétique par le mouvement le plus simple et le moins énergétique possible. Ce type de contrainte se retrouve dans toutes les déterminations de champ de vitesse à la surface du noyau.

Voorhies (1986a, 1986b), Whaler et Clarke (1988) et Bloxham (1988) ont proposé des modèles de champs de vitesse stationnaires. Voorhies et Backus (1985) ont montré qu'un tel mouvement est théoriquement unique; en pratique, il faut que le champ et sa variation séculaire varient suffisamment au cours de la période étudiée pour que la stationnarité apporte une véritable contrainte: Jackson (1989, p.129) suggère ainsi que l'intervalle 1960-1980 ne permet pas une telle étude. De nombreux mécanismes physiques pourraient justifier une certaine stabilité; par exemple, un mouvement qui serait dû à des anomalies thermiques à la base du manteau (Bloxham et Gubbins, 1987) n'est pas susceptible de varier rapidement. La découverte des sauts de variation séculaire (voir 2.1.1) fournit l'indice de mouvements de grande échelle subissant des accélérations brusques, mais nous ne disposons pas encore de modèles planétaires précis de saut de variation séculaire et, sans informations supplémentaires, la recherche de mouvements permanents peut constituer une première étape du calcul; d'ailleurs

les modèles de variation séculaire moyennent déjà la variation du champ magnétique sur quelques années. Par contre les modèles de variation séculaire, une fois combinés à des informations supplémentaires sur la physique du noyau, permettent de calculer les structures de grande échelle des mouvements à la surface du noyau.

### 2.3.3 Mouvements tangentiellement géostrophiques à la surface du noyau

Les mouvements dans le noyau doivent obéir aux lois générales de la mécanique des fluides, en particulier à l'équation de Navier-Stokes, qui traduit le bilan des forces agissant sur une particule de fluide, et à l'équation de conservation de la masse; elles décrivent un écart, associé aux mouvements dans le noyau, à l'équilibre hydrostatique.

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + 2\rho (\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) + \rho \left( \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho_1 \vec{g} + \vec{j} \wedge \vec{B} + \rho \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (9)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (10)$$

Nous avons écrit ici l'équation de Navier-Stokes (eg Gubbins et Roberts, 1987, pp 12-15) dans un repère tournant avec le manteau à la vitesse  $\vec{\Omega} \cdot \nu$ , viscosité cinématique;  $p$ , pression;  $\rho$ , densité;  $\vec{g}$  accélération de la pesanteur. Des équations supplémentaires sont nécessaires pour décrire l'évolution du champ magnétique (et donc de la force de Lorentz ( $\vec{j} \wedge \vec{B}$ )) et de l'hétérogénéité de densité  $\rho_1$ . Nous nous restreignons à l'étude de mouvements de grande échelle variant sur des périodes de 1 à 100 ans, susceptibles d'entraîner les lignes de force du champ magnétique et de contribuer ainsi à sa variation séculaire, telle que l'on peut la déduire de mesures du champ à la surface de la Terre. Nous utiliserons les ordres de grandeur suivants: temps caractéristique  $T = 3 \cdot 10^8 s$ , vitesse caractéristique

$U = 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ , longueur caractéristique  $L = 10^6 \text{ m}$ .

La viscosité  $\rho \nu$  est si petite ( $\approx 3 \cdot 10^{-2}$  poises) (Poirier, 1988) qu'elle n'intervient que dans une mince couche-limite, épaisse d'environ 1 mètre, à la surface du noyau, qui ne joue aucun rôle dans la variation séculaire du champ magnétique. Avec les ordres de grandeur ci-dessus, on vérifie:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \ll 2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u})$$

De même, les variations de  $\vec{\Omega}$  sont si faibles (voir le premier chapitre) que l'on vérifie:

$$\rho \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} \ll 2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u})$$

L'équation de Navier se réduit alors à:

$$2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) = -\vec{\nabla} p + \rho_1 \vec{g} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (11)$$

On en déduit un ordre de grandeur des anomalies de densité susceptibles d'influencer les mouvements du noyau participant à la variation séculaire du champ magnétique:

$$\rho_1 \approx 10^{-9} \rho$$

L'approximation de Boussinesq ( $\rho_1 \ll \rho$ ) est ici pleinement justifiée. Par ailleurs:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \ll \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho$$

L'équation de conservation de la masse se réduit donc à:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (12)$$

L'approximation des mouvements tangentiellement géostrophiques consiste à négliger la force de Lorentz devant l'accélération de Coriolis. En prolongeant le champ mesuré à la surface de la Terre à travers le manteau presque isolant,

nous pouvons estimer le champ magnétique à la surface du noyau, qui se réduit là à sa partie poloïdale  $P$ :

$$r = c \quad P \approx 510^{-4} T.$$

A partir de cette valeur, on peut calculer un ordre de grandeur de la densité de courant associée et de la force de Lorentz correspondante:

$$\frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \wedge \vec{P}) \wedge \vec{P} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ N.m}^{-3}$$

à comparer à:

$$2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ N.m}^{-3}$$

Cela ne suffit pas pour qu'on puisse négliger les forces de Lorentz dans l'équation (11), car un champ toroïdal fort, sans contrepartie à la surface de la Terre, pourrait régner dans le noyau: comme nous allons souvent rencontrer cette dernière idée, j'en rappelle brièvement l'origine (voir, par exemple, Fearn, Roberts et Soward, p.152). Les deux équations de Maxwell  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ ,  $\vec{j} = 1/\mu \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$  et la loi d'Ohm  $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$  se combinent pour former l'équation d'induction:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B} \quad (13)$$

Les géomagnéticiens accordent beaucoup d'importance à l'interaction, traduite par le terme  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})$ , entre la partie dipôle  $\vec{P}_1^0$  du champ magnétique et les mouvements zonaux. Le dipôle représente aujourd'hui environ la moitié du champ à la surface du noyau; le champ magnétique, pris en moyenne sur quelques milliers d'années, se réduit à un dipôle, stable sur quelques centaines de milliers d'années. De même, les mouvements zonaux  $\omega(r, \theta) \vec{\phi}$  jouent sans doute un rôle important dans la physique du noyau, en raison de la rotation de la Terre, rapide en comparaison des vitesses dans le noyau. Or l'interaction entre  $\vec{P}_1^0$  et  $\omega(r, \theta) \vec{\phi}$  induit un champ toroïdal zonal  $\vec{Q}^0$  (équation (13)) tandis qu'un mouvement zonal

n'a aucun effet sur un champ magnétique toroïdal zonal; il y a donc dissymétrie et, si l'on suppose la création de champ toroïdal  $\vec{\nabla} \wedge (\omega(r, \theta) \vec{\phi} \wedge \vec{P}_1^0)$  compensée par le terme de diffusion  $\eta \Delta \vec{Q}^0$ , il vient:

$$Q^0 = R P_1^0$$

où R est le nombre de Reynolds magnétique,

$$R = \frac{UL}{\eta} \approx 50$$

Des courants électriques intenses  $\vec{j}$  et une force de Lorentz notable pourraient être associés à ce champ toroïdal

$$j \approx \frac{1}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{|\vec{j} \wedge \vec{B}|}{|2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u})|} \approx 2 \cdot 10^6 \frac{\partial Q^0}{\partial r}$$

Nous pourrions donc utiliser l'approximation des mouvements tangentiellement géostrophiques si:

$$\frac{\partial Q^0}{\partial r} \ll 5 \cdot 10^{-7} T m^{-1}$$

Il n'y a pas de raison pour que les courants électriques soient particulièrement confinés près de la surface du noyau où pourtant le champ toroïdal s'annule; il faut un temps  $\tau$

$$\tau = \frac{Q^0 L}{U P_1^0} = \frac{R L}{U} = \frac{L^2}{\eta}$$

pour fabriquer le champ toroïdal  $\vec{Q}^0$  à partir de  $\vec{P}_1^0$ ; par construction la longueur caractéristique de diffusion est assimilée à la dimension caractéristique du noyau et la notion de couche de diffusion, où le champ toroïdal varierait rapidement n'a pas de sens ici. La théorie qualitative ci-dessus, faisant intervenir un champ toroïdal fort, donne

$$Q^0 = 2 \cdot 10^{-2} T., \quad L = 10^6 m, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial Q^0}{\partial r} \approx 2 \cdot 10^{-8} T m^{-1}$$

Benton et Muth (1979) proposent une estimation supérieure

$$\frac{\partial Q^0}{\partial r} \approx 10^{-6} T m^{-1}$$

mais leur méthode se réduit à imposer a priori un équilibre entre forces de Lorentz et accélération de Coriolis.

Par contre l'étude du couple exercé par les forces de Lorentz sur le manteau nous fournit une estimation indépendante (Stix et Roberts, 1984). Le chapitre (II.1) de ce mémoire est consacré à ce couple. Je décris en particulier (II.1.5.2) le couple  $\Gamma_d$  produit par la diffusion de champs toroïdaux depuis le noyau dans le manteau. Le couple  $\Gamma_e$  exercé par les forces de Lorentz ne peut être responsable des irrégularités de la rotation de la Terre que s'il y a quasi-équilibre entre le couple  $\Gamma_d$  et le couple  $\Gamma_{\bar{d}}$ , également d'origine électromagnétique, associé aux mouvements de la surface du noyau. Alors  $\partial Q/\partial r$  peut être précisément calculé car il ne dépend plus du principal paramètre inconnu dans cette théorie, la conductivité du manteau inférieur, mais seulement des mouvements de la surface du noyau; il vient

$$\frac{\partial Q}{\partial r} \approx 210^{-8} T m^{-1}$$

En fait, dans ce mémoire, je donne plus d'importance au couple exercé par la pression à l'interface noyau-manteau. Le couple de diffusion  $\Gamma_d$  peut alors être indépendant de  $\Gamma_{\bar{d}}$  et l'on a (équation (31) dans II.1.5.2):

$$\Gamma_d \approx \alpha(\sigma) \frac{\partial Q}{\partial r}$$

$\alpha(\sigma)$  est une fonction croissante de la conductivité. Une valeur de  $1 S m^{-1}$  me semble une borne inférieure assez sûre de la conductivité à la base du manteau (voir II.1.4.1). Si  $\Gamma_d$  n'est pas équilibré par un autre couple agissant entre le noyau et le manteau, il faut en tenir compte dans le bilan des mécanismes responsables du ralentissement séculaire de la Terre. Nous avons constaté, au premier chapitre,

que les forces de marée exercées par la Lune et le rebondissement post-glaciaire expliquent très convenablement le ralentissement observé; il semble donc improbable que le couple  $\Gamma_d$  puisse produire un ralentissement (ou une accélération) supérieur à 0,5 ms/siècle; alors

$$\Gamma < 10^{16} N.m \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial r} < 310^{-8} Tm^{-1}$$

Il reste une éventualité que je ne peux écarter: une partie stable du couple exercé par les forces de pression (II.2) pourrait compenser  $\Gamma_d$  et nous interdire de l'estimer.

Désormais je me placerai dans l'hypothèse où l'on peut négliger les forces de Lorentz devant l'accélération de Coriolis à la surface du noyau.

$$2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) = -\vec{\nabla}P + \rho_1 \vec{g} \quad (14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$r = c$$

$$u_r = 0$$

Alors, à la surface du noyau

$$\vec{u} = \frac{1}{2\rho\Omega\cos\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}P \quad (15)$$

Si l'on ne sait rien de plus sur la pression, cette équation équivaut pour le mouvement à:

$$\nabla_H \cdot (\vec{u} \cos\theta) = 0 \quad (16)$$

Le Mouël, Gire et Madden (1985) ont imposé cette contrainte au mouvement à la surface du noyau qu'ils ont calculé à partir de la variation séculaire du champ magnétique. Backus et Le Mouël (1986) ont montré que la contrainte géostrophique permettait de lever une grande partie de l'indétermination théorique dans le calcul d'un mouvement à la surface du noyau à partir de la variation séculaire. Notons à leur suite

$$\psi = B_r / \cos\theta$$

L'équation (4) se transforme en

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\vec{\nabla}_H \cdot ((\vec{u} \cos\theta)\psi) \quad (17)$$

et, compte tenu de (16), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{B_r}{\cos\theta} \right) = 0 \quad (18)$$

Par ailleurs, l'équation (15) permet de déduire de (17):

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{1}{2\rho\Omega} (\vec{e}_r \wedge \vec{\nabla} P) \cdot \vec{\nabla} \psi = \frac{1}{2\rho\Omega} (\vec{e}_r \wedge \vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{\nabla} P \quad (19)$$

Le long de chaque courbe de niveau de  $\psi(\theta, \phi)$ ,  $p$  est déterminé à une constante près. A l'équateur, d'après (15):

$$\frac{\partial P}{\partial \phi} = 0$$

La pression  $p$  est constante le long de l'équateur. Si une courbe ( $B_r / \cos\theta = Cte$ ) coupe l'équateur (forcément en un point où  $B_r = 0$ ), la pression est parfaitement déterminée le long de cette courbe. Pour résumer, la pression est partout déterminée, sauf à l'intérieur des surfaces qui ne peuvent pas être reliées à l'équateur par une courbe ( $B_r / \cos\theta = Cte$ ), où elle est déterminée à une fonction  $f(B_r / \cos\theta)$  près. Alors l'équation (14) assure l'unicité théorique du champ de vitesse tangentiellement géostrophique  $\vec{u}$  en dehors de ces zones litigieuses où  $\vec{u}$  est seulement déterminé à un vecteur tangent aux courbes  $B_r / \cos\theta = Cte$  près, de la forme  $1/\cos\theta \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla} f(B_r / \cos\theta)$ . Les figures (1) et (2) de Backus et Le Mouél illustrent ces zones ambiguës (voir aussi notre figure (2) ci-dessous).

L'équation (18) prouve que les courbes  $B_r / \cos\theta = Cte$  (en particulier l'équateur géographique) sont des courbes matérielles; elles délimitent des surfaces à travers lesquelles, si le noyau se comporte comme un conducteur parfait, le



flux de champ magnétique doit être conservé. Jackson (1989) observe sur ses cartes de champ à la surface du noyau (voir 2.1.3) une variation importante du flux de champ magnétique à travers de telles surfaces (y compris à travers chacun des deux hémisphères) d'une époque à l'autre; au contraire, Benton, Estes et Langel (1987) vérifient à partir du modèle de variation séculaire de Langel et al. (1982) la conservation du flux de part et d'autre de l'équateur entre 1965 et 1975.

#### 2.3.4 Prolongement des mouvements tangentiellment géostrophiques à l'intérieur du noyau

Si l'équation (14) est valable à la surface du noyau, elle est aussi valable au moins dans une petite couche sous la surface du noyau. On peut y exprimer  $p$ ,  $u_\theta$ , et  $u_\phi$  en fonction de  $u_r$  et de ses dérivées radiales (Le Mouél, Jault et Gire, 1987); les expressions à la surface se calculent plus simplement après ce prolongement dans cette couche. À l'intérieur du noyau, (15) se généralise en:

$$\rho \vec{u} = \frac{1}{2\Omega \cos\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla} p + \frac{\rho u_r}{\cos\theta} \vec{k} \quad (20)$$

$\vec{k}$ , vecteur unitaire le long de l'axe de rotation. On écrit alors l'équation de conservation de la masse pour obtenir:

$$\frac{1}{2\Omega} \frac{\partial p}{\partial \phi} = r^2 \left( \cos\theta \frac{\partial \rho u_r}{\partial z} - \sin^2\theta \frac{\rho u_r}{r} \right)$$

cela impose, en particulier, le long de tout parallèle ( $\theta, r$ )

$$\int_0^{2\pi} \rho u_r d\phi = 0$$

alors  $p$ ,  $u_\theta$ ,  $u_\phi$  peuvent s'exprimer en fonction de  $u_r$ :

$$p = 2\Omega r^2 \left( \int_0^\theta \left( \cos\theta \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial z} - \sin^2\theta \frac{\rho u_r}{r} \right) d\phi \right) + \pi(r, \theta) \quad (21)$$

$$\rho u_\theta = -\frac{r}{\sin\theta} \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial z} \quad (22)$$

$$\rho u_\phi = \frac{r}{\cos\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \int_0^\theta \left( \cos\theta \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial z} - \sin^2\theta \frac{\rho u_r}{r} \right) d\phi \right) + \frac{1}{2\Omega r \cos\theta} \frac{\partial\pi(r, \theta)}{\partial\theta} \quad (23)$$

Un mouvement toroïdal zonal, indépendant de  $u_r$ , apparaît ici comme une constante d'intégration. L'hétérogénéité de densité  $\rho_1$  se calcule à partir de la pression  $p$

$$\rho_1 = \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (24)$$

Dans l'appendice (A1), je développe  $u_r$  et ses dérivées radiales en harmoniques sphériques. A la surface du noyau,  $p$ ,  $u_\theta$ , et  $u_\phi$  ne dépendent que de  $\partial(\rho u_r)/\partial r$ . Connaître le mouvement à la surface du noyau, c'est connaître  $\partial(\rho u_r)/\partial r$ . Posons

$$\rho u_r = \sum_{n,m} f_n^m Y_n^m$$

où  $Y_n^m$  est l'harmonique sphérique de degré  $n$  et d'ordre  $m$  non normalisée.

$$Y_n^m = P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

Alors, en  $r = c$

$$\vec{u} = \sum_{n,m} \frac{c f_n^m}{n(n+1)} \vec{V}_n^m, \quad f_n^m = \frac{\partial f_n^m}{\partial r} \quad (25)$$

$$\text{avec} \quad \vec{V}_n^m = \left( \vec{\sigma}_n^m - \frac{i}{m} \left( \frac{n(n+2)(n-m+1)}{2n+1} \vec{\tau}_{n+1}^m + \frac{(n^2-1)(n+m)}{2n+1} \vec{\tau}_{n-1}^m \right) \right) \quad (26)$$

où  $\vec{\sigma}_n^m$  est le vecteur poloïdal  $\vec{\nabla}_S Y_n^m$  et  $\vec{\tau}_n^m$  le vecteur toroïdal  $\vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}_S Y_n^m$ . Un vecteur tangentielllement géostrophique se décompose sur une base de vecteurs élémentaires  $\vec{V}_n^m$  associant deux vecteurs toroïdaux à un vecteur poloïdal (Le Mouél et al., 1985; Backus et Le Mouél, 1986).

Une fois connus les coefficients du développement du champ de vitesse à la surface du noyau sur la base tangentiellement géostrophique, la pression à la surface du noyau se calcule facilement

$$p = 2\Omega c^2 \cos^2 \theta \sum_{n,m} f'_n{}^m \frac{Y_n^m}{im} \quad (27)$$

$$p = 2\Omega c^2 \cos^2 \theta \sum_{n,m} f'_n{}^m \frac{1}{im(2n+1)} \left( \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2n+3} Y_{n+2}^m + \left( \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} + \frac{(n+m)(n-m)}{2n-1} \right) Y_n^m + \frac{(n+m)(n+m-1)}{2n-1} Y_{n-2}^m \right) \quad (28)$$

Par contre, la connaissance de  $\partial(\rho u_r)/\partial r$  ne suffit pas à déterminer l'hétérogénéité de densité à la surface du noyau; à partir de (24), nous obtenons en effet

$$\rho_1 = \frac{2\Omega}{g} \left( c^2 f'_n{}^m \frac{\cos^2 \theta Y_n^m}{im} + c f'_n{}^m \left( \frac{(1 + \cos^2 \theta) Y_n^m}{im} + \frac{\sin 2\theta \partial Y_n^m / \partial \theta}{im} \right) \right) \quad (29)$$

Les équations (23) et (21) relient mouvement toroïdal zonal et pression zonale, mais à nouveau le calcul de  $\rho_1$  (ici de sa partie zonale) fait intervenir une dérivée radiale supplémentaire

$$\rho_1 = \frac{1}{g} \left( \cos \theta \frac{\partial \pi}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial \pi}{r \partial \theta} \right)$$

### 2.3.5 Symétrie du champ de vitesse par rapport au centre de la Terre

Gire et Le Mouél (1990) ont utilisé la base  $(\vec{Y}_n^m)_{n,m}$  pour obtenir un champ de vitesse exactement tangentiellement géostrophique à la surface du noyau. La mise en oeuvre numérique de cette idée pose des problèmes. Lorsque le degré  $n$  croît, la partie poloïdale de  $(\vec{Y}_n^m)$  devient négligeable devant ses partenaires toroïdaux; en général le terme toroïdal  $\vec{v}_{n+1}^m$  de  $(\vec{Y}_n^m)$  est en grande partie compensé par le terme toroïdal de  $(\vec{Y}_{n+2}^m)$ . Il devient difficile de tronquer le mouvement à

un ordre  $n$  donné. Prenant en compte ces associations entre termes  $(\vec{Y}_n^m)$  et  $(\vec{Y}_{n+2}^m)$ , Gire et Le Mouél définissent des chaînes géostrophiques: pour  $m$  donné, il y a une chaîne paire ( $n$  pair) et une chaîne impaire ( $n$  impair). Il apparaît que seuls les coefficients des chaînes impaires convergent rapidement avec le degré  $n$  et comme par ailleurs les coefficients des chaînes paires sont faibles, c'est à dire qu'elles ne participent guère à la variation séculaire observée, Gire et Le Mouél en déduisent qu'il ne faut retenir que les chaînes impaires dans un calcul de mouvement à la surface du noyau. Le mouvement ainsi obtenu est symétrique par rapport au centre de la Terre mais doit être complété par un mouvement toroïdal zonal (voir (23)).

Revenons un instant sur la question de l'unicité théorique d'un mouvement tangentiellement géostrophique. La partie zonale  $\pi(\theta)$  de la pression est déjà entièrement déterminée; les figures (1) et (2) montrent en effet qu'aucun parallèle n'est entièrement contenu dans la zone ambiguë et donc que la partie toroïdale zonale du champ de vitesse peut être calculée de façon unique. Soit  $M(\theta, \phi)$  un point de l'hémisphère Nord où la pression est parfaitement déterminée

$$P(\theta, \phi) = \pi(\theta) + P_1(\theta, \phi)$$

$P_1$  désigne ici la pression associée aux chaînes géostrophiques;  $P_1$  est antisymétrique par rapport au centre de la Terre si on ne conserve dans le mouvement que les chaînes impaires (mouvement symétrique par rapport au centre de la Terre), et

$$P(\pi - \theta, \pi + \phi) = \pi(\pi - \theta) - P_1(\theta, \phi)$$

Nous connaissons ainsi la pression au point symétrique  $M(\theta, \phi)$  de  $M(\pi - \theta, \pi + \phi)$  et par suite sur toute la courbe  $B_r / \cos\theta = Cte$  reliée à ce point (figure 2). La même opération permet de déterminer la pression dans les zones ambiguës de l'hémisphère Sud. Après éventuellement une itération, la pression et le mouvement

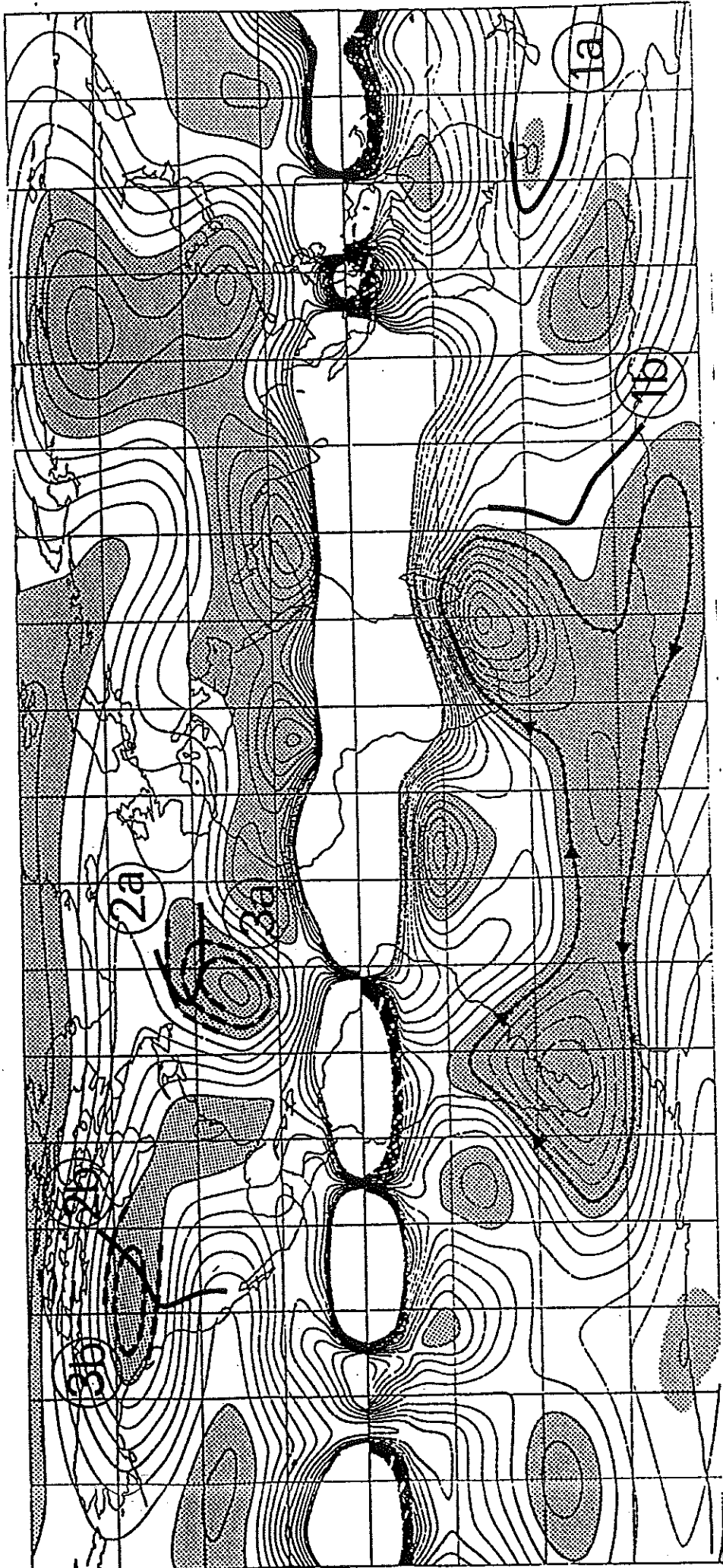


Figure 2: démonstration de l'unicité d'un mouvement tangentiellement géostrophique et symétrique par rapport au centre de la Terre:

1. courbes  $B_r / \cos \theta = c_1 e$  où la pression est déterminée (car rejoignant l'équateur).
2. courbes symétriques des courbes (1) par rapport au centre de la Terre.
3. La pression est déterminée le long de toutes les courbes  $B_r / \cos \theta = c_2 e$  sécantes avec des courbes (2).

(voir (15)) sont entièrement déterminés. Un mouvement tangentiellement géostrophique dont la partie non-zonale est symétrique par rapport au centre de la Terre est théoriquement unique.

### 2.3.6 Mouvements toroïdaux

#### 2.3.6.1 Noyau stratifié et mouvements toroïdaux

A nouveau, le géomagnéticien est guidé par l'analogie avec d'autres fluides géophysiques. Dans l'atmosphère, il y a peu d'échanges entre les couches, de densités très différentes, et les mouvements sont en grande partie horizontaux. Nous ne savons pas si le noyau est, comme l'atmosphère, stratifié (Gubbins et Roberts, 1987 pp 27-38). Dans un liquide stratifié, un élément de fluide se déplaçant de  $\delta r$  est plus lourd que les particules environnantes et est ramené à sa position initiale. En l'absence totale de mouvements radiaux, la dynamo terrestre ne pourrait pas être entretenue (Fearn et al.(1987), p.128). Par contre, différents mécanismes physiques pourraient expliquer que les couches supérieures du noyau, seules, seraient stratifiées (Fearn et Loper, 1981; Gubbins, Thomson, et Whaler, 1982). La solidification progressive du noyau interne s'accompagne d'une libération d'éléments légers (la partie solide est supposée enrichie en éléments lourds) et Fearn et Loper (1981) expliquent que deux mécanismes antagonistes gouvernent l'évolution de la composition du noyau: les éléments légers ont tendance à s'élever, pour minimiser l'énergie potentielle de gravitation, tandis que le liquide cherche à s'homogénéiser. Le premier phénomène serait prédominant dans presque tout le noyau, sauf peut-être dans une couche homogène et stable à la surface du noyau, dont ils ont évalué l'épaisseur à 70km. Fearn et Loper mettent en garde contre une utilisation trop rapide de leur théorie,

remarquant que le temps caractéristique de mise en place d'une telle couche est de l'ordre de l'âge de la Terre, et que les paramètres importants du problème (en particulier la diffusivité chimique) sont très mal connus. L'argumentation de Gubbins et al. repose, quant à elle, sur une discussion de l'évolution thermique du noyau.

Pour étudier les conséquences d'une éventuelle stratification des couches supérieures du noyau, il ne semble pas nécessaire de conserver la force de Lorentz dans l'équation du mouvement: a priori, stratification du noyau et intensité des forces de Lorentz sont deux problèmes indépendants. Les mouvements restent décrits par le système:

$$\begin{aligned} 2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) &= -\vec{\nabla} p + \rho_1 \vec{g} \\ \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \end{aligned}$$

La stratification se traduit par une forte dépendance radiale de l'hétérogénéité de densité:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial r} \gg \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho_1}{\partial \phi} \quad (30)$$

L'équation (29) nous permet de traduire (30) par:

$$\forall n, m \quad \frac{\partial f_n^m}{\partial r} \gg \frac{n f_n^m}{r}$$

Alors, dans les couches supérieures du noyau, supposées stratifiées, (27) et (29) deviennent:

$$\begin{aligned} \frac{p_n^m}{2\Omega} &\approx r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial f_n^m}{\partial r} \\ \frac{(\rho_1)_n^m g}{2\Omega} &\approx r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f_n^m}{\partial r^2} \end{aligned}$$

Au premier ordre  $p$  est relié à  $\rho_1$  par l'équilibre hydrostatique:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_1 g$$

De même (voir (21) et (22))

$$u_\theta, u_\phi \approx r \frac{\partial u_r}{\partial r} \gg u_r$$

et (20) devient

$$\rho \vec{u} \approx \frac{1}{2\Omega \cos\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla} p$$

Si l'on s'intéresse à un mouvement de petite échelle, on peut négliger la variation de  $\cos\theta$  et le champ de vecteur  $\rho \vec{u}$  est toroïdal (Pedloski, 1979 p.325). Mais, pour un mouvement de grande échelle:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{2\Omega \cos\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla} p \right) \neq 0$$

Il n'est pas possible de négliger dans (20) le terme  $\rho u_r / \cos\theta$  avant d'écrire l'équation de conservation de la masse. Comme dans l'atmosphère (Pedloski, 1979 p.406), le mouvement de grande échelle est au premier ordre horizontal mais n'est pas toroïdal. La stratification du noyau imposerait au mouvement d'être horizontal au premier ordre et de varier rapidement avec le rayon, mais ne s'oppose pas à l'utilisation du formalisme géostrophique et, en particulier, n'impose pas au mouvement d'être purement toroïdal. Seuls les mouvements de petite échelle sont toroïdaux et cela explique pourquoi les vecteurs géostrophiques élémentaires ( $\vec{\gamma}_n^m$ ) de degré élevé tendent à être purement toroïdaux.

### 2.3.6.2 Mouvements toroïdaux

Whaler (1980) et Lloyd et Gubbins (1990) supposent que les couches supérieures du noyau sont stratifiées, identifient, peut-être un peu rapidement,



mouvements horizontaux au premier ordre et mouvements toroïdaux, et expliquent qu'alors les mouvements de la surface du noyau peuvent se représenter sous forme toroïdale. De nombreux auteurs ont proposé des modèles de champs de vitesse toroïdaux (Whaler et Clarke, 1988; Lloyd et Gubbins, 1990; Voorhies, 1986; Bloxham, 1989). L'hypothèse de mouvements toroïdaux divise par deux le nombre d'inconnues mais n'assure pas l'unicité de la solution (un champ de vitesse de type (8), avec  $\lambda$  constant, est toroïdal mais n'induit aucune variation séculaire).

Si le mouvement à la surface du noyau est toroïdal:

$$\vec{\nabla}_H \cdot \vec{u} = 0$$

Il n'y a ni convergence, ni divergence du fluide à la surface du noyau. (4) devient:

$$\frac{dB_r}{dt} = 0$$

D'après (5), le flux de champ magnétique à travers une surface bornée par une courbe  $B_r = \text{Cte}$  est conservé. Whaler (1984) n'a pas pu utiliser cette propriété pour tester l'hypothèse de mouvements toroïdaux, faute d'un modèle de variation séculaire suffisamment précis. Depuis, Bloxham et Gubbins ayant observé une variation de flux à travers une surface  $\Sigma_0$  de frontière  $B_r = 0$ , les fluctuations du flux de champ magnétique à travers les surfaces limitées par les courbes  $B_r = \text{Cte}$  doivent être comparées aux fluctuations du flux à travers  $\Sigma_0$  avant d'être jugées significatives. Appliquant ce principe, Jackson (1989) n'a pas décelé de violation claire de l'hypothèse de mouvements toroïdaux.

**Remarque:** A propos de la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique à la surface du noyau.

Lloyd et Gubbins (1990) proposent de rendre unique la détermination d'un mouvement toroïdal en utilisant les composantes horizontales de l'équation de l'induction (13). Pour l'instant, nous avons recherché des mouvements de la surface du noyau satisfaisant à la composante radiale de cette équation, avec

$$\left(\frac{\partial B_r}{\partial t}\right)_n = \left(\frac{\partial B_r}{\partial t}\right)_m$$

$\left(\frac{\partial B_r}{\partial t}\right)_m$ , étant calculé à partir d'un modèle de variation séculaire. A l'intérieur d'un conducteur parfait l'équation de l'induction (équation (13) avec  $\eta = 0$ ) s'écrit:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) \quad (31)$$

Barracough, Gubbins et Kerridge (1989) et Gubbins et Roberts (1987, pp 108-112) avancent que  $\vec{B}$  pourrait être continu à travers la frontière noyau-manteau. Les composantes tangentielles de (31) permettent alors à Lloyd et Gubbins de compléter la détermination de  $\vec{u}$ , et même d'ébaucher un calcul de  $\partial \vec{u} / \partial r$ . Cette question est critique: l'équation (31) implique qu'il ne peut y avoir de champ toroïdal induit à la surface du noyau si le champ  $\vec{B}$  est continu à travers la frontière noyau-manteau ( $\vec{B}$  et  $\partial \vec{B} / \partial t$  peuvent alors s'exprimer comme des gradients à la surface du noyau): le mouvement à la surface du noyau est tel qu'il n'induit pas de champ toroïdal. Seul un rôle important des forces de Lorentz dans l'équation du mouvement pourrait expliquer que le champ magnétique influence le mouvement; cela remettrait en cause l'approximation tangentiellement géostrophique.

La continuité de  $\vec{B}$  à la frontière noyau-manteau pose bien un problème théorique. En effet, en utilisant une équation telle que (31), valide pour un fluide

de conductivité infinie, nous devons introduire une couche limite au sommet du noyau, dans laquelle la diffusion de champ magnétique joue un rôle important, et où circule une nappe de courants électriques surfaciques, provoquant une discontinuité de  $\vec{B}$  entre la base du manteau et la base de la couche limite. Hide et Stewartson (1972) ont repris le travail déjà cité de Roberts et Scott (1965) ont montré que la couche d'Ekman-Hartmann (i.e. la couche limite visqueuse rencontrée dans un fluide conducteur, plongé dans un champ magnétique, et en rotation rapide) se décrit, dans le noyau, comme une couche d'Ekman (en raison de la faible viscosité), et ont calculé la discontinuité de la composante tangentielle du champ à travers cette couche d'Ekman ; ils obtiennent une valeur fonction du nombre d'Ekman ( $E \approx 3 \cdot 10^{-15}$ ) et donc très faible. En fait nous pouvons traiter séparément la couche limite visqueuse d'épaisseur  $\epsilon$  (de l'ordre d'un mètre) assurant la condition de non glissement  $\vec{u} = \vec{0}$  et la couche limite de diffusion d'épaisseur  $\delta$  (de l'ordre d'une dizaine de km pour les constantes de temps de la variation séculaire) imposée par la continuité de  $\vec{B}$  à travers la frontière noyau-manteau. La prise en compte de la viscosité peut se limiter à remplacer  $\vec{u} = \vec{0}$  par  $u_r = 0$  à la surface du fluide considéré comme non visqueux;  $\vec{B}$  est continu entre le corps du fluide où l'on peut négliger la viscosité et le manteau (Hide et Stewartson, 1972). Par contre, il reste à écrire les effets de la diffusion ohmique et, pour cela, Barraclough et ses coauteurs (1989) n'ont pas le droit d'utiliser le résultat d'Hide et Stewartson, qui conservent le terme de diffusion dans le corps du noyau, comme preuve de la continuité de  $\vec{B}$ . Outre la couche d'Ekman-Hartmann, une seconde couche diffusive doit être introduite (Benton et Loper, 1969; Loper et Benton, 1970) (Hide et Stewartson ne s'intéressent pas, dans leur discussion de couche limite, aux variations temporelles du champ, que l'on ne peut pourtant pas négliger si l'on veut utiliser l'équation (31), et

n'ont pas à introduire de couche diffusive, la diffusion intéressant tout le noyau lorsque le champ est considéré comme stationnaire). Braginsky (1984) traite cette couche diffusive, de façon classique, en négligeant la dynamique.

Dans le noyau,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (p\vec{r}) + \vec{\nabla} \wedge (T\vec{r})$$

A la surface du noyau,  $p$  et  $\partial p / \partial r$  sont continus,  $T = 0$ . Dans le corps du noyau, où

$$\frac{|\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})|}{|\eta \Delta \vec{B}|} \approx R = \frac{UL}{\eta} \gg 1$$

nous négligerons la diffusion

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})$$

La partie poloïdale du champ du noyau peut se raccorder au champ dans le manteau et n'a pas besoin de varier rapidement; la diffusion peut être négligée. Par contre, la partie toroïdale du champ s'annule à la frontière noyau-manteau, varie rapidement au sommet du noyau et le terme de diffusion doit être conservé. La longueur caractéristique devient  $\delta$ , épaisseur de la couche-limite ( $\delta \ll L$ ) et l'analyse dimensionnelle ci-dessus ne tient plus. On peut décrire ce phénomène en écrivant

$$T = T_1 + T_2$$

$r = c$

$$T_2 = -T_1$$

loin à l'intérieur du noyau

$$T_2 = 0$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \eta \Delta T_2$$

$\delta \approx (\eta\tau)^{\frac{1}{2}}$ , où  $\tau$  temps caractéristique de la variation séculaire. Pour résumer, à la surface du noyau  $T = 0$  mais l'équation (31) ne contraint pas le scalaire toroïdal  $T_1$  auquel se réduit  $T$  dans le corps du noyau.

En d'autres termes, nous pouvons dire que calculer un saut de la composante tangentielle du champ n'a guère de signification puisque la nappe de courant s'ajuste précisément de manière à permettre la transition entre le champ induit dans le noyau et le champ nul à la surface. Soit  $j_H$  la densité de courant horizontal dans la couche de diffusion:

$$\vec{j}_H = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (T\vec{r})$$

$$j_H = \frac{1}{\mu_0} \frac{Q_2}{\delta} = \frac{1}{\mu_0} \frac{Q_1}{\delta}$$

$Q_1$  étant le champ toroïdal induit; l'amplitude du saut de  $\vec{B}$  s'écrit grâce au théorème d'Ampère

$$(B_n - B_m) = \mu_0 j_H \delta = Q_1$$

Considérer le noyau comme conducteur parfait revient à faire tendre  $\delta$  vers 0;  $j_H$  se décrit alors comme une nappe de courants surfaciques. Cette théorie classique néglige la dynamique du fluide et il reste à vérifier que les forces de Lorentz associées à  $j_H$  sont négligeables devant l'accélération de Coriolis:

$$|\vec{j} \wedge \vec{B}| = \frac{1}{\mu_0} \frac{Q}{\delta} P = \frac{1}{\mu_0} \frac{UP^2\tau}{L(\eta\tau)^{\frac{1}{2}}} = 210^{-7} \ll |2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u})|$$

Il ne faut pas attendre d'informations supplémentaires sur les mouvements à la surface du noyau des composantes tangentielles de  $\vec{B}$ ; cela ne doit pas nous surprendre: l'équation (6) nous a permis de décrire l'évolution de la composante radiale du champ  $B_r = -\partial V / \partial r$ ;  $V$  se déduit de  $\vec{B}_r$  et les composantes tangentielles de  $\vec{B}$ , qui se déduisent de  $V$ , n'apportent pas d'informations supplémentaires sur la variation séculaire.

## 2.4 Les mouvements à la surface du noyau

### 2.4.1 Les grands traits du mouvement

Sans imposer d'autres conditions a priori au mouvement que d'être de grande échelle, Gire et ses co-auteurs (1986) définissent une partie stable du champ de vitesse, regroupant les termes bien déterminés après l'inversion de l'équation (4). Ils comparent les champs de vitesse obtenus pour deux modèles de variation séculaire différents AWC70 (Hurwitz et al., 1974) et GSFC80 (Langel et al., 1982) et observent que la partie toroïdale ( $\vec{v}_n^m = \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}_H Y_n^m$ ) est conservée mais que la partie poloïdale ( $\vec{a}_n^m = \vec{\nabla}_H Y_n^m$ ) est très différente d'une époque à l'autre. En imposant au mouvement de satisfaire au mieux la contrainte géostrophique (16), Le Mouél, Gire et Madden (1985) retrouvent la partie toroïdale déjà connue mais la contrainte géostrophique leur permet de relier les termes poloïdaux du mouvement aux termes toroïdaux (voir (26)) et donc de les stabiliser; la géométrie du mouvement s'avère alors conservée d'une époque à l'autre et seule son intensité varie. Gire et Le Mouél (1990) perfectionnent ensuite cette description, en utilisant la base géostrophique  $(\vec{v}_n^m)_{n,m}$ , pour écrire le mouvement qui devient ainsi exactement géostrophique. Alors, le fluide ne peut pas traverser l'équateur: dans une étroite bande équatoriale, le champ de vitesse est aligné le long des parallèles géographiques; en particulier, on remarque une importante dérive vers l'ouest entre les latitudes 60°E et 100°O. Par ailleurs, un seul élément  $(\gamma_1)_s$  de la base permet de décrire une grande partie du mouvement. La partie poloïdale de  $(\gamma_1)_s$  traduit une montée de fluide à la latitude 90°E et une divergence (ou descente) de fluide à 90°O centrée sur l'équateur tandis que sa partie toroïdale est caractérisée (voir fig.1 de Gire et Le Mouél, 1990) par deux paires de tourbillons symétriques par rapport à l'équateur et centrés sur les méridiens 0° et 180°, à 60° de latitude. Les cartes de champs de vitesse (fig.7a et b et 12 de

Gire et Le Mouél, 1990) montrent bien une montée de fluide à l'Est de l'Inde et une descente à l'Ouest du Pérou. Parmi les quatre tourbillons, deux sont particulièrement accentués: à l'aplomb de l'Atlantique Nord et du sud de l'Australie; ils tournent l'un et l'autre dans le sens des aiguilles d'une montre et sont symétriques par rapport au centre de la Terre comme le reste du mouvement. Il reste deux mouvements circulaires l'un à l'aplomb de la côte Ouest de l'Amérique du Nord et son symétrique à l'aplomb de l'Océan Indien. Cette description nous permet de comparer ce champ de vitesse proposé par Gire et Le Mouél à d'autres modèles récents géostrophiques (Bloxham, 1989), toroïdaux (Bloxham, 1989) ou stationnaires (Voorhies, 1986; Whaler et Clarke, 1988). De nombreux aspects du mouvement se retrouvent d'un travail à l'autre: la figure (3) en présente une synthèse. En fait, il semble que le mouvement soit en grande partie géostrophique, toroïdal, et stationnaire (Bloxham, 1989) (rappelons que la partie toroïdale d'un mouvement géostrophique est prédominante). Ces derniers mois, les différentes équipes travaillant aux calculs de champ de vitesse à la surface du noyau s'accordent à proposer que le mouvement tend à être symétrique par rapport à l'équateur (Hulot, Le Mouél et Jault, 1990; Bloxham, 1989).

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous calculerons le couple des forces de pression s'exerçant sur la frontière noyau-manteau. La formule (28) permet de calculer la pression après que les mouvements, supposés tangentielllement géostrophiques, ont été calculés à la surface du noyau. La carte (fig.3) de la pression à la surface du noyau, telle que l'on peut la déduire du modèle de Gire et Le Mouél (1990), est presque identique à une carte récente non publiée de Voorhies; ses grandes lignes me semblent assez fiables.

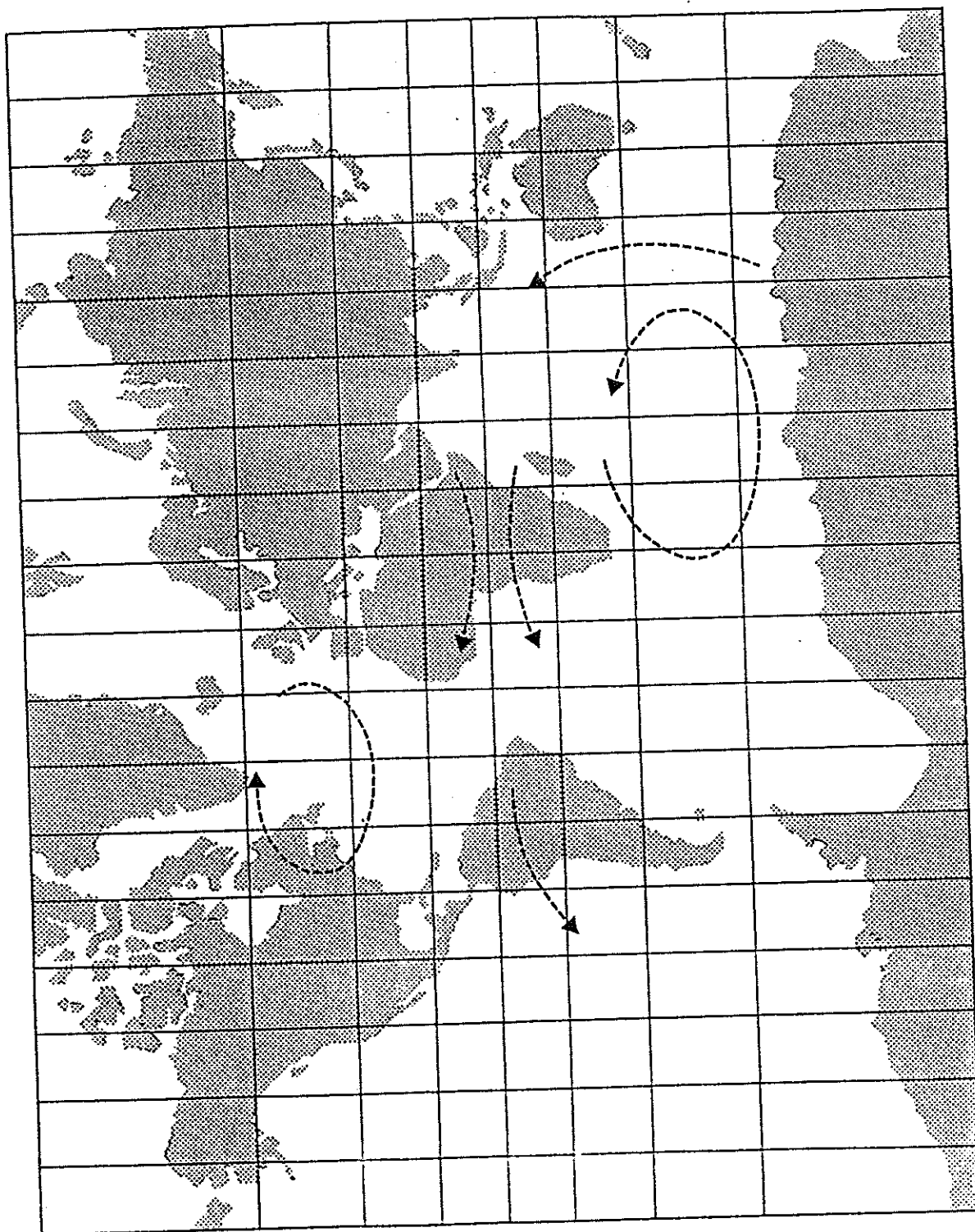


Figure 3: carte des grands traits du mouvement (admis par la plupart des équipes travaillant au calcul de champs de vitesse à la surface du noyau).





## 2.4.2 La partie toroïdale zonale du mouvement

Les paramètres des mouvements toroïdaux zonaux  $c\omega(r, \theta)\sin\theta\vec{\phi}$  se révéleront cruciaux dans la discussion des hypothèses et théories développées dans ce mémoire. Le moment cinétique du noyau est en effet porté par ces mouvements toroïdaux zonaux. De même, le couple exercé par les forces de Lorentz sur le manteau inférieur, susceptible de contribuer aux irrégularités de la rotation de la Terre, dépend linéairement de l'amplitude de la rotation en bloc de la surface du noyau par rapport au manteau, c'est à dire du mouvement toroïdal zonal particulier ( $\omega(c, \theta) = cte$ ).

### 2.4.2.1 Bref historique de l'étude de la dérive vers l'Ouest de la figure du champ magnétique à la surface de la Terre.

Depuis les observations d'Halley à la fin du 17ème siècle, la dérive vers l'ouest est considérée comme l'une des principales caractéristiques du champ magnétique de la Terre. Dès lors que les sources de ce champ furent placées dans un corps à l'intérieur de la Terre, la dérive vers l'ouest fût considérée comme symptomatique d'une rotation en bloc de ce corps par rapport aux couches supérieures de la Terre. Lorsque les géophysiciens eurent compris que des mouvements dans le noyau liquide sont responsables du champ principal, la dérive vers l'ouest permit de définir une vitesse typique du fluide du noyau. Courtillot et Le Mouél (1988) donnent un historique détaillé de ces découvertes. Bullard et ses coauteurs (1950) réalisèrent la première étude quantitative, qui servit longtemps de référence. Ils cherchèrent, entre autres, à déterminer une dépendance de la dérive vers l'ouest en fonction de la latitude et en conclurent que l'on ne peut pas déceler d'écarts significatifs à une rotation en bloc de  $0,2^\circ/\text{an}$  de la figure du champ. Nous avons proposé (Jault, Gire et Le Mouél, 1988) une

interprétation différente de leurs résultats. Bullard et ses coauteurs avaient utilisé deux jeux de cartes des éléments Nord X, Est Y, et vertical Z du champ respectivement construites pour les années 1907.5 et 1945 à partir de la compilation de Vestine et al. (1947). Ils avaient mesuré la dérive de chaque élément aux noeuds d'une grille espacés de 20° en latitude et 10° en longitude. La figure (5), construite à partir de la table (8) de leur article représente la dérive  $u_x(\Theta)$ ,  $u_y(\Theta)$ , et  $u_z(\Theta)$  de chacun des trois éléments, moyennées le long des parallèles, en fonction de la latitude. Les courbes de dérive des éléments Y et Z indiquent l'une comme l'autre une dérive plus forte près de l'équateur tandis que la courbe  $u_x(\Theta)$  présente une géométrie presque opposée: deux pics aux latitudes 40°N et 40°S. Moyennant  $u_x(\Theta)$ ,  $u_y(\Theta)$ , et  $u_z(\Theta)$ , Bullard et ses coauteurs obtenaient une dérive globale presque uniforme. En fait, supposons une rotation différentielle  $\omega(\theta)$  de la surface du noyau. L'équation (4) permet d'écrire:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\omega \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \quad (32)$$

Il n'est pas direct d'en déduire le comportement du champ à la surface de la Terre. Le champ crée dans le noyau peut s'écrire:

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}V$$

avec 
$$V = \alpha \sum_{n,m} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)) P_n^m(\cos\theta) \quad (33)$$

en particulier

$$B_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

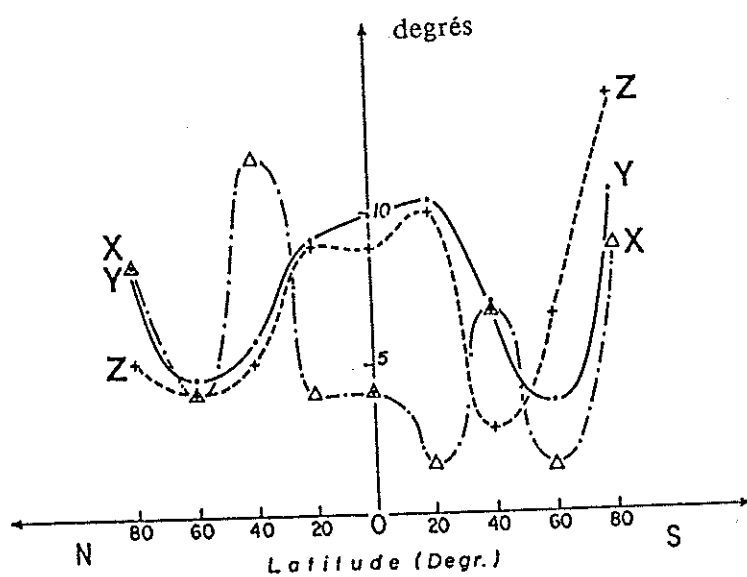


Figure 5: dérive vers l'ouest  $u_x, u_y, u_z$  des trois composantes X, Y, Z du champ magnétique à la surface de la Terre intégrée entre 1907.5 et 1945, d'après Bullard (1950).

L'équation (32) met en évidence qu'une rotation différentielle transforme une harmonique du champ en harmoniques de degré différent tandis que (33) démontre que, suivant leur degré, leurs coefficients ne sont pas atténués de la même façon entre les surfaces du noyau ( $r=c$ ) et de la Terre ( $r=a$ ). Cependant, en imaginant une rotation différentielle virtuelle  $\omega_v(\theta)$  du potentiel géomagnétique à la surface du noyau, nous pouvons comprendre de façon intuitive pourquoi  $u_x(\Theta)$  apparaît si différent de  $u_y(\Theta)$  et  $u_z(\Theta)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} + \omega_v \frac{\partial B_r}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \omega_v \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \\ \frac{\partial B_\theta}{\partial t} + \omega_v \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \omega_v \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \\ \text{par contre} \quad \frac{\partial B_\theta}{\partial t} + \omega_v \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \omega_v \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_v}{\partial \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (34)$$

La dérive de X ( $X = -B_\theta$ ) n'est pas représentative de  $\omega_v(\theta)$ . Les dérivées de Y et Z, par contre, sont des indicateurs valables d'une rotation différentielle qui peut se modéliser, en première approximation (voir figure (5)), comme une rotation uniforme d'une bande équatoriale; une telle rotation expliquerait les deux pics (voir le terme  $\partial \omega_v / \partial \theta$  dans (34)) de  $u_x$  aux bords de cette bande.

La dérive vers l'ouest de la figure du champ ne peut pas être identifiée sans précautions à des mouvements toroïdaux zonaux: cependant, nous allons maintenant vérifier que les calculs de mouvement à la surface du noyau confirment l'hypothèse avancée ci-dessus d'une rotation vers l'ouest confinée à une bande centrée sur l'équateur géographique.

### 2.4.2.2 Les mouvements toroïdaux zonaux: des mouvements à la surface du noyau parmi d'autres mais particulièrement mal déterminés

Une détermination plus rigoureuse de l'amplitude de la rotation vers l'ouest du noyau par rapport au manteau fût l'une des principales motivations des calculs de mouvements à la surface du noyau (Gire et al., 1984); les problèmes rencontrés dans l'estimation de cette rotation illustrent particulièrement bien l'indétermination théorique exposée 2.3.1.

Le champ de vitesse

$$\vec{u}_0 = \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}_H B_r \quad (35)$$

appartient à l'espace des champs de vitesse n'induisant aucune variation séculaire (voir équation (8)). Le scalaire  $B_r$  peut se développer en harmoniques sphériques

$$B_r = \sum_{n,m} (b_r)_n^m Y_n^m$$

Le terme dipôle, qui représente 50% du champ à la surface du noyau, donne dans le mouvement  $\vec{u}_0$ , un terme de rotation en bloc  $t_1^0 \vec{\theta}_1^0$ . Nous construisons ainsi un champ de vitesse  $\vec{w}$

$$\vec{w} = -\frac{t_1^0}{(b_r)_1^0} \sum_{(n,m) \neq (0,1)} \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}_H ((b_r)_n^m Y_n^m) \quad (36)$$

ayant le même effet qu'une dérive vers l'ouest; son amplitude est comparable à la rotation en bloc  $t_1^0 \vec{\theta}_1^0$  dont il peut équilibrer l'effet.

Supposons que l'on n'introduise pas dans le processus de calcul d'autres informations a priori sur le mouvement que d'être de grande échelle. Cette condition se traduit par la définition d'une norme  $\|\vec{u}\|_1$ , pénalisant les termes de petite échelle, que l'on cherche à minimiser. En particulier, puisque

$$\|\vec{w}\|_1 > \|t_1^0\|_1$$

le calcul du mouvement favorisera la rotation en bloc et un mouvement tel que  $\vec{\omega}$  aura tendance à se déguiser sous les traits d'une rotation en bloc. La fig.(5) de Gire, Le Mouël et Madden (1984) représentant la colonne et la ligne relatives à l'inconnue  $t_1^0$  de la matrice de résolution de leur inversion illustre cette propriété et le fait que, de manière plus générale, cette méthode d'inversion assure qu'une rotation en bloc vraie sera bien décrite comme telle mais que, par contre, d'autres mouvements apparaîtront, dans le résultat, comme une rotation en bloc. Gire et al. comparent deux choix de norme  $|\cdot|_1$  correspondant à une décroissance plus ou moins forte de l'intensité du mouvement  $(\alpha_n^m \vec{\nabla}_H Y_n^m + b_n^m (\vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}_H Y_n^m))$  avec son degré  $n$ . Moins la condition est stricte, moins forte est l'estimation de la rotation en bloc vers l'ouest ( $-t_1^0$ ): l'erreur commise en ne prenant pas en compte les autres mouvements de la surface du noyau correspond à une surestimation de la rotation en bloc. L'introduction d'autres informations a priori est donc ici fondamentale et devrait permettre d'éviter ce dernier phénomène. Le champ de vitesse  $\vec{\omega}$  est toroïdal (voir (36)) et la restriction aux seuls termes toroïdaux ne devrait pas nous aider beaucoup. Par contre, il ne serait peut-être pas inutile de reprendre l'étude de Gire et al. (1984) (inspection de la matrice de résolution, influence du choix de la norme  $|\cdot|_1$ ) avec un champ de vitesse tangentiellement géostrophique (symétrique par rapport au centre de la Terre ou non).

Cependant, l'indétermination pratique est peut-être ici encore plus grave que l'indétermination théorique. La figure (6) représente le modèle de variation séculaire adopté par Gire et Le Mouël (1990) pour leur calcul de mouvements à la surface du noyau tandis que la figure (7) représente la variation séculaire créée par la partie toroïdale zonale de leur résultat. Les mouvements toroïdaux zonaux ont un faible rôle dans la variation séculaire du champ magnétique;

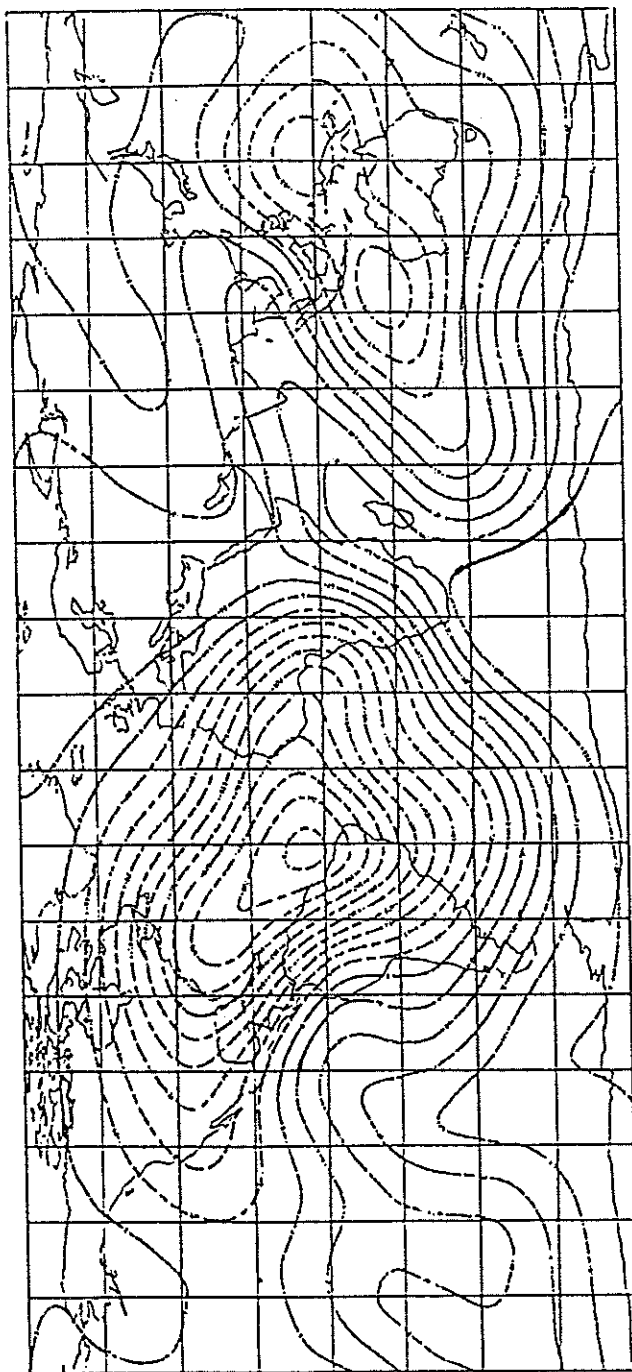


Figure 6: variation séculaire, en 1980, à la surface de la Terre (modèle de Peddie et Fabiano (1982)); équidistance des courbes: 20 nT/an.



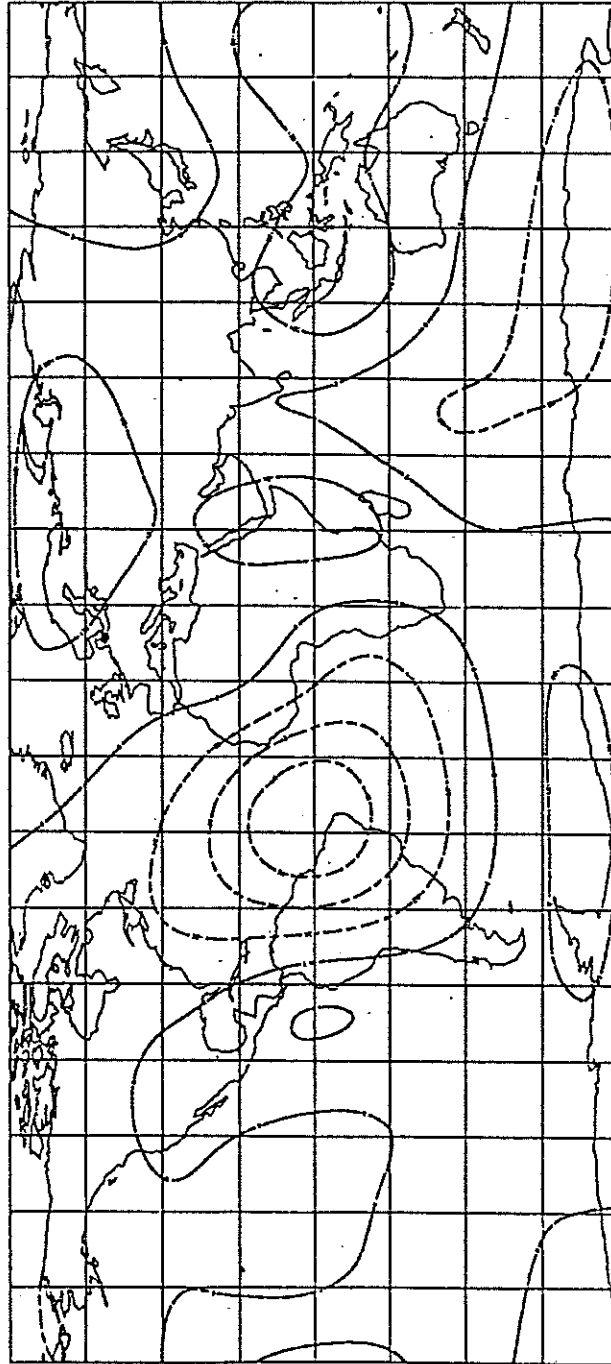


Figure 7: variation séculaire crée par les seuls mouvements toroïdaux zonaux (modèle de Girc et Le Mouél (1990) pour l'époque 1980).  
équidistance des courbes: 20 nT/an

une erreur dans leur estimation ne détériore pas beaucoup l'accord entre les modèles de variation séculaire établis directement à partir des observations d'une part, recalculés à partir du champ de vitesse résultat d'autre part.

Logiquement, les estimations de la rotation en bloc  $t_1^0$ , considérée comme un coefficient parmi d'autres du mouvement, sont systématiquement plus faibles que la valeur  $0.2^\circ/\text{an}$  obtenue par Bullard et al. (1950) en étudiant la variation séculaire à la surface de la Terre, et sont de l'ordre de  $0.1^\circ/\text{an}$  (Table (1) dans 2.5 ci-dessous; Voorhies, 1986; Bloxham, 1989).

Par contre, le calcul global de mouvements à la surface du noyau confirme que les mouvements toroïdaux zonaux (en direction de l'Ouest) sont accentués dans une bande équatoriale (fig.2 de Jault, Gire, Le Mouél, 1988). Nous avons déjà remarqué cette propriété sur les cartes de champ de vitesse à la surface du noyau (2.4.1).

### 2.4.3 Evolution des mouvements

Si la géométrie des mouvements à la surface du noyau commence à être déterminée, l'étude de leur évolution en est encore à ses balbutiements. Gire et al. (1984) furent les premiers à tenter une telle étude; ils ne s'intéressèrent qu'à l'évolution du terme de rotation en bloc. Ils imposèrent au mouvement d'être de grande échelle et conclurent que, suivant la rigueur plus ou moins grande de cette contrainte, l'estimation de  $t_1^0$  variait beaucoup, mais que l'inversion du modèle GSFC 1980 (pour 1980) (Langel et al., 1982) fournissait des valeurs systématiquement deux fois plus fortes que celle du modèle AWC70 (pour 1965) (Hurwitz et al., 1974). Le Mouél et al. (1985) introduisirent ensuite la contrainte géostrophique et observèrent que l'énergie totale des mouvements déduits du

modèle GSFC80 était à peu près le double de celle des mouvements obtenus par inversion de AWC70. La même technique d'inversion a été utilisée avec d'autres modèles; on note une augmentation d'environ 50% du terme de rotation en bloc entre (1965-1970) et (1980-1982) (Jault et al., 1988; voir aussi la table (1) dans (2.5)). Récemment, Bloxham (1989) a utilisé ses cartes de champ à la surface du noyau pour étudier l'évolution du mouvement au 20<sup>e</sup> siècle, auquel il impose d'être toroïdal (la différence entre deux cartes donne la variation séculaire entre les deux époques concernées). Il propose ainsi 7 modèles de champs de vitesse s'échelonnant dans le temps entre (1915-1920) et (1975-1980). Ses cartes de mouvement indiquent une grande stabilité du mouvement et en particulier il n'y a pas de variation significative de son intensité. Le problème reste ouvert.

## 2.5 Le moment cinétique du noyau

Le calcul de la composante axiale du moment cinétique du noyau

$$\sigma_n = \vec{k} \cdot \int \int \int \vec{r} \wedge (\vec{u} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \rho \, dv \quad (37)$$

nécessite théoriquement la connaissance du mouvement  $\vec{u}$  dans l'ensemble du noyau, mais la variation séculaire du champ magnétique de la Terre ne nous renseigne que sur les mouvements à la surface. Dans ce chapitre, je propose une méthode pour déduire de ces seuls mouvements à la surface les variations du moment cinétique du noyau.

Nous supposons le noyau sphérique. Alors

$$\sigma_n = \int \int \int (r \sin \theta) \rho u_\phi r^2 \, dr \sin \theta \, d\theta \, d\phi + I_n \Omega$$

$I_n$  moment d'inertie du noyau. Les termes non zonaux de  $u_\phi$  (tels que  $\int \rho u_\phi d\phi = 0$ ) ne contribuent pas au moment cinétique du noyau). La composante  $u_\phi$  d'un vecteur poloïdal étant toujours non zonale, seuls les termes toroïdaux zonaux du champ de vitesse doivent être pris en compte dans le calcul de  $\sigma_n$ .

### 2.5.1 Rotations rigides de cylindres centrés sur l'axe de rotation de la Terre

Taylor (1963) et Braginsky (1970) ont illustré le rôle fondamental, pour une théorie des mouvements dans le noyau, des rotations rigides  $\omega(s)$  d'anneaux cylindriques centrés sur l'axe de rotation de la Terre ( $s$  distance à l'axe). Prendre en compte la variation de la densité  $\rho(r)$  avec le rayon ne modifie pas les raisonnements (voir une discussion plus complète dans l'article reproduit en II.3) et ne change pas non plus quantitativement les résultats. Nous supposons donc  $\rho$  uniforme.

Le noyau est un corps en rotation rapide:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{u} \cdot \nabla \cdot \vec{u} \ll 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{u})$$

L'équation du mouvement (9) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} 2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) &= -\vec{\nabla} p + F(t) \\ \vec{u} \cdot \vec{e}_r &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

où  $\vec{F}$  représente l'ensemble des forces (gravité, Lorentz) gouvernant le mouvement; nous les supposons connues. Ces équations laissent indéterminée une partie des mouvements et de la pression. Recherchons  $(\vec{v}, \pi)$  tels que:

$$2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla} \pi \quad (39a)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_r = 0 \quad (39b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (39c)$$

Appliquant  $\vec{\nabla} \wedge$  à (39a) nous obtenons la condition de Proudman-Taylor

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0} \quad (40)$$

Le mouvement reste constant le long de toute droite parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Nous utiliserons les coordonnées cylindriques  $(s, \phi, z)$  et la condition (40) s'écrit alors

$$\vec{v}(s, \phi, z) = \vec{v}(s, \phi)$$

La condition aux limites

$$\vec{v}(s, \phi) \cdot \vec{e}_r = 0$$

écrite aux deux extrémités du cylindre  $s = s_0$  dans le noyau impose

$$\vec{v}(s, \phi) = \lambda(s, \phi) \vec{e}_\phi$$

et, d'après (39c)

$$\vec{v}(s, \phi) = \lambda(s) \vec{e}_\phi$$

Nous vérifions donc que pour un mouvement  $(\vec{v}(s, \phi) = \lambda(s) \vec{e}_\phi)$  donné, il existe une pression  $\pi(s)$  permettant de satisfaire le système (39).  $\vec{F}$  étant supposé connu, le système (38) laisse indéterminée une famille  $(\vec{v}, \pi)$ . Dans le cas de ce champ de vitesse particulier, il n'est pas possible de négliger  $\partial \vec{v} / \partial t$  devant  $(2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) + \vec{\nabla} \pi)$  qui est identiquement nul. Une solution de (38) n'est déterminée qu'à un mouvement  $(\vec{v}, \pi)$  près; le rôle de ces mouvements va se trouver éclairé après l'étude de l'existence de solutions de (38).

Taylor (1963) a montré que, pour un champ de force  $\vec{F}$  donné, le système (38) a une solution si et seulement si

$$\forall s \quad \int \int \vec{F}(s, \phi, z) \cdot \vec{e}_\phi s^2 d\phi dz = 0 \quad (41)$$

Cette condition est nécessaire car

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial P}{\partial \phi} d\phi = 0$$

$$\text{et} \quad \int \int 2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e}_\phi s d\phi dz(s_0) = 2\Omega \int \int \rho u_s s d\phi dz(s_0) =$$

$$2\Omega \left( \int \int \int_{s < s_0} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dv - \int \int_{r=c, s \leq s_0} (\rho \vec{u}) \cdot \vec{e}_r dS \right) = 0 \quad (42)$$

Ce théorème peut aussi s'énoncer: le couple total s'exerçant sur chaque anneau cylindrique ( $s = s_0$ ) est nul. L'équation (42) implique qu'il n'y a pas de couple exercé par les forces de Coriolis sur le noyau. Supposons  $\vec{F}(s, \phi, z)$  quelconque; il existe une fonction  $F_1(s)$  et une seule telle que

$$\forall s \quad \int \int (\vec{F}(s, \phi, z) \cdot \vec{e}_\phi - F_1) d\phi dz = 0$$

Taylor (1963) nous donne la solution de (38) où l'on remplace  $\vec{F}$  par  $(\vec{F} - F_1 \vec{e}_\phi)$ .

Le système (38) est incompatible avec la partie des forces de volume dans le noyau qui peut s'écrire sous la forme  $F_1(s) \vec{e}_\phi$ , c'est à dire avec les forces exerçant des couples axiaux non nuls sur les cylindres  $C(s)$  de rayon  $s$ . Ces couples accélèrent les anneaux  $C(s)$ , dont la rotation est laissée indéterminée par (38). Nous formalisons cette approche qualitative en écrivant le bilan des couples s'exerçant sur  $C(s)$ .  $\vec{F}$  représente l'ensemble des forces mais nous devons reprendre une à une les différentes accélérations intervenant dans le bilan (9) de quantité de mouvement. Nous savons déjà que l'accélération de Coriolis ne donne lieu à aucune variation de moment cinétique. Le cas de l'accélération convective, de même nature, est plus complexe. S'il est facile de vérifier qu'il n'y a pas de variation de moment cinétique de l'ensemble du noyau qui lui soit associée, elle peut être à la source d'échanges de moment cinétique entre cylindres  $C(s)$ . Nous n'en tiendrons pas compte car

$$\vec{u} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \vec{u} \ll \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

pour les dimensions caractéristiques retenues tout au long de ce travail (section 2.3.3). Un couple résultant sur le noyau correspond en vertu du principe d'action et de réaction à un couple sur le manteau:  $\vec{\Omega}$  varie et il faut, pour rester cohérent, prendre en compte le terme  $d\vec{\Omega}/dt \wedge \vec{r}$ ; alors

$$\int_{c(s)} \int \rho \frac{\partial v}{\partial t} dS + \int_{c(s)} \int \rho s \frac{d\Omega}{dt} dS = \int_{c(s)} \int F_1 dS$$

Le noyau répond aux couples exercés par les différentes forces de volume (gravité, Lorentz) par des accélérations  $\partial \vec{v} / \partial t$  d'anneaux cylindriques centrés sur l'axe de rotation de la Terre. Nous reprendrons cette démonstration dans l'article qui constitue le chapitre (II.3) de ce mémoire et vérifierons que le couple exercé par les forces de pression, qui apparaît lorsque l'on tient compte des écarts à la sphéricité de la surface du noyau, a le même effet.

### 2.5.2 Calcul du moment cinétique du noyau

Nous ne connaissons pas les mouvements toroïdaux zonaux à l'intérieur du noyau et nous ne pouvons donc pas calculer le moment cinétique du noyau. Par contre, si notre théorie ci-dessus est exacte, les variations de ce moment cinétique, pour les constantes de temps que nous considérons, sont portées par des rotations rigides d'anneaux cylindriques dont l'axe est l'axe de rotation de la Terre. Calculons le moment cinétique (37) de ces anneaux:

$$\sigma_n = \int \int \int \rho (s \vec{e}_s \wedge \vec{u}) \cdot \vec{k} dv + I_n \Omega$$

$$\sigma_n = \sigma_1 + I_n \Omega$$

$\sigma_1$  est le moment cinétique "relatif" du noyau. A la surface du noyau, la partie toroïdale zonale du champ de vitesse s'écrit

$$\vec{u} = - \sum_n \left( ct_n^0 \frac{\partial P_n^0}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\phi = - \sum_n (ct_n^0 P_n^1) \vec{e}_\phi$$

$t_n^0$  a ainsi la dimension d'une rotation angulaire. Nous prolongeons le mouvement à l'intérieur du noyau en écrivant

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_\phi = u_\phi(s)$$

alors

$$\sigma_1 = - \sum_n \int \rho s ct_n^0 P_n^1 2\pi s ds 2l(s)$$

$l(s) = \sqrt{c^2 - s^2}$  demi-hauteur du cylindre de rayon  $s$  à l'intérieur du noyau. Notons  $\theta$  la colatitude du cercle de la surface du noyau qui constitue le bord supérieur du cylindre de rayon  $s$ .

$$l = c \cos \theta \quad s = c \sin \theta \quad ds = -c \sin \theta d\theta$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= - \sum_n 4\pi \rho c^5 t_n^0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \cos^2 P_n^1 d\theta \\ &= - \sum_n \rho c^5 t_n^0 \int_{r=c} \int \sin \theta \cos^2 \theta P_n^1(\cos \theta) dS \end{aligned}$$

Cette dernière identité nous permet d'utiliser les propriétés d'orthogonalité des harmoniques sphériques.

$$-\sin \theta \cos^2 \theta = \frac{2}{15} P_3^1 + \frac{1}{5} P_1^1$$

Seuls  $t_1^0$  et  $t_3^0$  interviendront dans le calcul. Puisque

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2}{15}$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{8}{35}$$



$$\sigma_i = \left( \frac{8\pi}{15} t_1^0 + \frac{32\pi}{35} t_3^0 \right) \rho c^5 = \frac{8\pi}{15} \omega_e \rho c^5 \quad (43)$$

c'est à dire

$$\sigma_n = I_n (\omega_e + \Omega)$$

avec

$$\omega_e = t_1^0 + \frac{12}{7} t_3^0 \quad (44)$$

$\omega_e$  sera dite rotation équivalente du noyau. Dans le cas d'une rotation en bloc, nous retrouvons la valeur connue du moment cinétique. Mais  $\omega_e$  ne correspond pas au seul terme de rotation en bloc de la surface du noyau; par exemple une dérive vers l'ouest accentuée à l'équateur tend à diminuer l'amplitude de cette rotation équivalente.

### 2.5.3 Validation du modèle

Deux types d'observations seraient susceptibles de confirmer ce modèle. D'une part le comportement des mouvements toroïdaux zonaux  $t_n^0$  devrait être différent de celui des autres mouvements (fluctuations plus rapides?) et, en tout cas, les variations des mouvements  $t_n^0$  devraient être symétriques par rapport à l'équateur. La figure (8) montre que les mouvements toroïdaux zonaux calculés à partir de différents modèles de variation séculaire suivant la méthode de Le Mouél et al. (1985) ont tendance à être symétriques par rapport à l'équateur. Les mouvements de Jackson (1989), qui présentent cette symétrie après 1960, ne la conservent pas au début du 20<sup>ème</sup> siècle. D'autre part, l'estimation (43) du moment cinétique du noyau  $\sigma_n(t)$  permet de comparer ses variations à celles du moment cinétique du manteau déduites des irrégularités de la longueur du jour (I.1).

Si l'ensemble manteau-noyau était un système isolé, nous devrions écrire

$$\frac{d}{dt}(\sigma_n + \sigma_m) = 0 \quad (45)$$

c'est à dire

$$I_n \Delta(\Omega + \omega_e) = -I_m \Delta \Omega$$

$$I_n \Delta \omega_e = -I_T \Delta \Omega \quad \text{où} \quad \Delta x = \int_T^t x(t) dt \quad (46)$$

Une courbe représentative (fig.9) de  $I_T \Delta \Omega$ , construite à partir de la figure (1) de (I.1) tirée de l'étude de Feissel et Gavoret (1987) permet de tenir compte des échanges de moment cinétique avec l'atmosphère (cela revient à gommer les fluctuations rapides); il suffit alors de soustraire un terme linéaire associé au ralentissement séculaire de la rotation de la Terre (voir I.1) pour obtenir les variations de  $I_T \Delta \Omega$ , devant être compensées par une variation du moment cinétique relatif du noyau. Pour calculer les estimations de  $\omega_e(t)$  reportées sur la figure (9), nous avons utilisé des modèles de variation séculaire répondant aux critères établis en (II.1) (voir table (1)) et le processus de calcul des mouvements (contraints à être tangentiellement géostrophiques) décrit par Le Mouél et al. (1985). La simple concordance des ordres de grandeur des fluctuations de  $I_n \Delta \omega_e$  et  $I_T \Delta \Omega$  est un résultat en soi; elle n'aurait pas été possible sans la révision à la baisse de l'amplitude des mouvements toroïdaux zonaux due à la prise en compte de l'ensemble des mouvements (voir 2.4.2.2). Mais la précision n'est pas suffisante et la période étudiée trop courte pour que la corrélation puisse être considérée comme établie. De plus, nous retrouvons difficilement ces estimations de  $\omega_e(t)$  avec des modèles plus récents de champ de vitesse (Gire et Le Mouél, 1990), qui quoique calculés avec une condition de symétrie non fondée sur une théorie (voir 2.3.5), suffisent à rendre compte de la variation séculaire. Ces derniers calculs, non publiés, devront être repris.

Ce travail devrait nous inciter à choisir le processus de calcul des champs de vitesse assurant la meilleure détermination possible des termes toroïdaux zonaux.

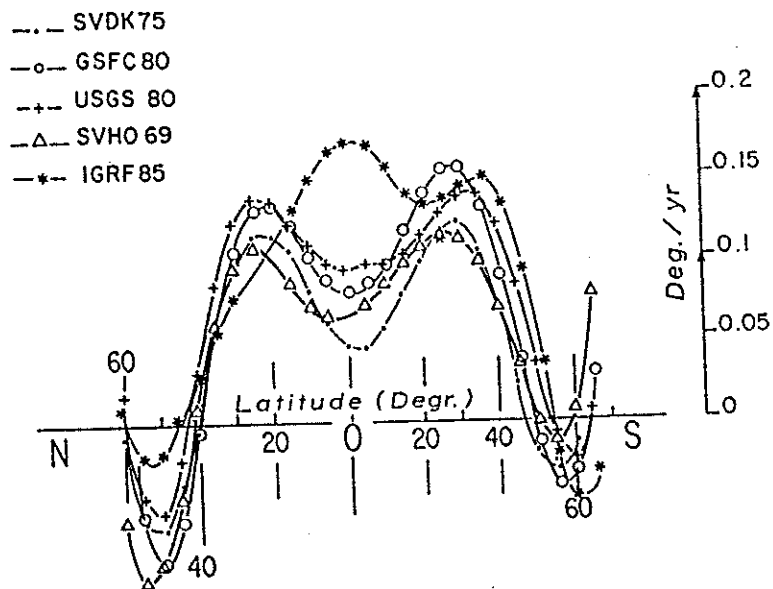


Figure 8: mouvements toroïdaux zonaux calculés à partir de différents modèles de variation séculaire: SVDK75 (Langel et al., 1986), GSFC80 (Langel et al., 1982), USGS80 (Peddie et Fabiano, 1982), SVHO69 (Hodder, 1981), IGRF85.

Année	Modèle	$t_1^0$	$t_3^0$	$\omega_*$	Référence
1965	AW70	-0.074	0.015	-0.048	Hurwitz et coll. (1974)
1969	HO69	-0.073	0.014	-0.049	Hodder (1981)
1970	DK70	-0.064	0.011	-0.045	Langel et coll.(1986)
1975	DK75	-0.069	0.009	-0.052	"
1982	DK82	-0.098	0.018	-0.067	"
1982	USGS82	-0.117	0.027	-0.072	Peddie et Zunde (1987)

Table 1: Rotation équivalente  $\omega_*$  (en degrés par an) déduite des coefficients toroidaux zonaux  $t_1^0$ ,  $t_3^0$  calculés suivant la méthode de Le Mouél et coll.(1985) et modèles de variation séculaire utilisés.

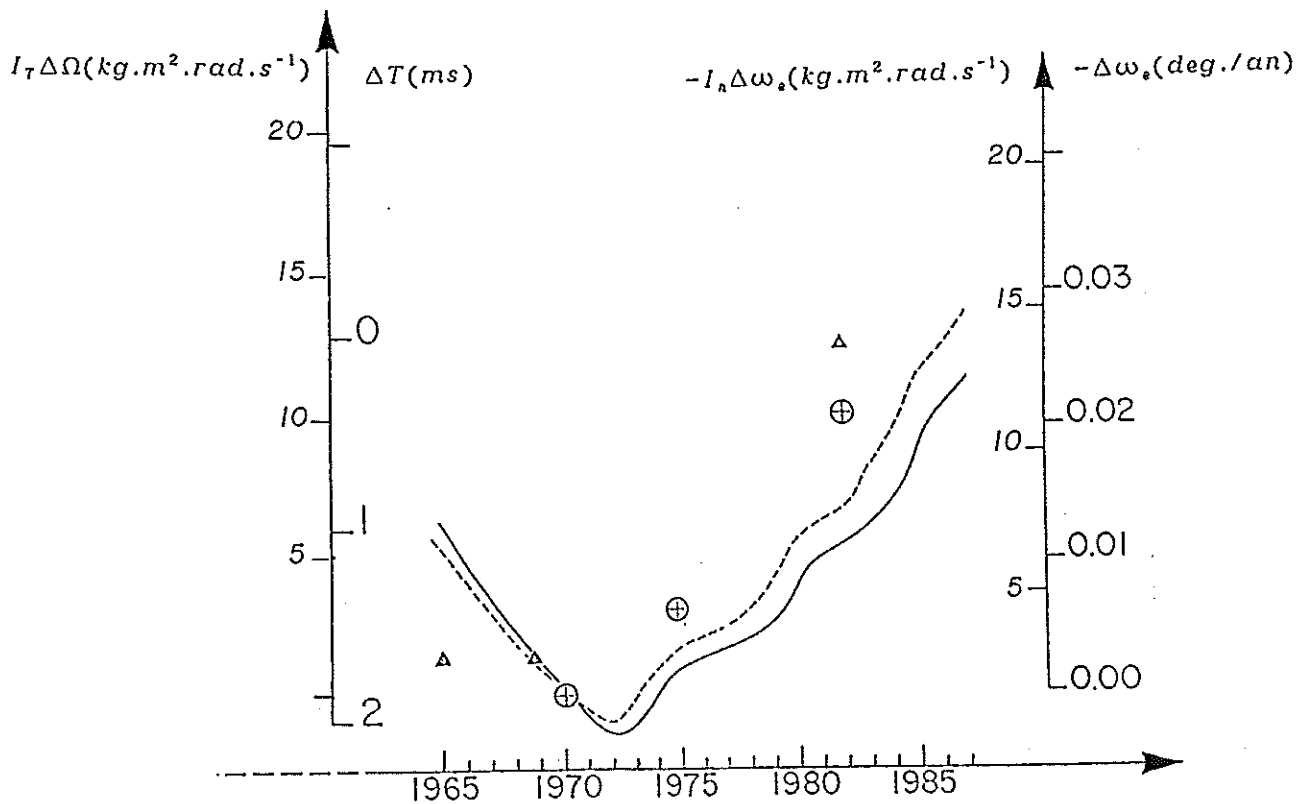


Figure 9: Comparaison des variations ( $-I_n \Delta\omega_*$ ) et ( $I_T \Delta\Omega$ ) entre 1965 et 1982.