

**DEUXIEME PARTIE**

**Les couples à l'origine des transferts de moment cinétique entre le noyau et  
le manteau de la Terre**

En laboratoire, la vitesse relative d'un liquide et de son récipient en rotation rapide est, en général, contrôlée par la viscosité du fluide (Greenspan, 1968). L'expérience type consiste à changer brusquement la vitesse angulaire du conteneur. Le fluide acquiert progressivement la vitesse du récipient, en circulant dans les couches limites visqueuses attachées aux parois. Le temps caractéristique de ce mécanisme, qui dépend de la viscosité du liquide, serait de l'ordre de 1000 ans dans le cas du noyau, dont la viscosité vaut environ  $3 \cdot 10^{-2}$  poises (Poirier, 1988). Ce phénomène peut jouer un rôle dans le fonctionnement de la dynamo, mais il faut envisager d'autres mécanismes pour interpréter les échanges de moment cinétique entre le noyau et le manteau sur les périodes allant de 5 à 100 ans.

Le champ magnétique, dont une partie seulement est observée à la surface de la Terre agit sur les courants électriques, créés par la variation de flux du champ magnétique dans la zone conductrice du manteau et par les différences de potentiel électrique à la surface du noyau, pour produire des forces volumiques de Lorentz dans le manteau inférieur. L'étude du couple, intégré dans l'ensemble du manteau, de ces forces est susceptible de nous renseigner sur la conductivité du manteau inférieur et sur l'intensité de la part du champ magnétique confinée au noyau et à la zone conductrice du manteau. Aussi de nombreux auteurs s'y sont intéressés. Dans un premier chapitre, je décris le fonctionnement de ce couple, dit "électromagnétique", en utilisant les modèles les plus récents de conductivité du manteau et de mouvements à la surface du noyau. Le profil de conductivité le plus réaliste correspond à un couple électromagnétique au moins dix fois plus faible que le couple nécessaire pour expliquer les irrégularités de la rotation de la Terre. Mon étude se limite à la période 1965-1980. Dans cet intervalle, le couple électromagnétique semble avoir diminué alors que le couple à l'origine des variations de la longueur du jour augmentait.

Ces constatations m'ont amené à accorder beaucoup d'importance au couple exercé, sur le manteau, par la pression associée aux mouvements de la surface du noyau. Avec J.L. Le Mouél, j'ai écrit à ce sujet deux articles, en anglais, qui forment un tout cohérent. Plutôt que de traduire ces deux textes et de réécrire une à une des formules fastidieuses, j'ai préféré les reprendre dans ce mémoire. Un chapitre particulier (II) les introduira et résumera leur contenu. J'essaierai de décrire le contexte de notre travail. En particulier, nos deux articles ne concernent que le terme axial du couple de pression, responsable des irrégularités de la longueur du jour. J'envisagerai donc, dans ce chapitre introductif, les composantes non axiales du couple, que nous avons étudiées avec J. Hinderer et H. Legros. Elles pourraient participer à l'excitation du terme de Chandler, oscillation libre de la Terre autour de son axe de rotation.

## 1 LE COUPLE EXERCE PAR LES FORCES DE LORENTZ DANS LE MANTEAU INFÉRIEUR

Des courants électriques peuvent pénétrer le manteau inférieur, faiblement conducteur (sa conductivité serait de l'ordre de  $100 \text{ S.m}^{-1}$  alors qu'elle n'atteint qu'1 ou  $2 \text{ S.m}^{-1}$  à 500 km de profondeur). Ces courants circulent à travers les lignes de force du champ magnétique et les forces de Lorentz qui en résultent exercent un couple sur le manteau. De fortes incertitudes entachent l'évaluation de l'ordre de grandeur de ce couple. En particulier, le profil de conductivité du manteau inférieur est mal connu et la loi d'Ohm  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  suffit à nous rappeler que la conductivité du manteau inférieur commande directement l'intensité des courants électriques y circulant. Néanmoins, il n'est pas impossible que le couple exercé par les forces de Lorentz, dit couple électromagnétique, atteigne des valeurs comparables au couple nécessaire pour expliquer les irrégularités de la longueur du jour. Rochester (1960,1962), Roberts (1972), Braginsky et Fishman (1976) et Stix et Roberts (1984) ont construit une théorie prenant de mieux en mieux en compte les données. Dans ce chapitre, je rends compte de leurs travaux, les illustre en utilisant des modèles complets de champs de vitesse à la surface du noyau, et discute l'efficacité du couplage électromagnétique.

### 1.1 Le principe de calcul du couple électromagnétique: un développement en perturbations

Le couple électromagnétique axial s'exerçant sur le manteau s'écrit:

$$\Gamma_e = \vec{k} \cdot \int \int_M \vec{r} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B}) dv \quad (1)$$

$\vec{j}$  est le vecteur densité de courant électrique,  $\vec{B}$  le champ magnétique,  $\vec{r}$  le vecteur

position et  $\vec{k}$  le vecteur unitaire de l'axe de rotation. Nous supposons le manteau faiblement conducteur (comparé au noyau), et introduisons une surface supplémentaire ( $r=b$ ) séparant les zones considérées comme conductrice ( $r<b$ ) et comme isolante ( $b<r$ ) du manteau ( $b \leq \alpha$ ,  $a$  rayon de la Terre).

La technique de calcul du couple électromagnétique peut se présenter comme une méthode de perturbation (Stix et Roberts, 1984).

A l'ordre 0, les courants électriques circulant dans le manteau sont négligés:

$$\vec{j}_0 = 0 \quad , \quad \vec{E}_0 = 0 \quad , \quad \Gamma_{e,0} = 0$$

Dans cette approximation, le champ magnétique  $\vec{B}_0$  se réduit à un champ dérivant d'un gradient. Elle est justifiée pour la partie lentement variable du champ magnétique, de constante de temps grande devant le temps de traversée du manteau par le champ provenant du noyau (de l'ordre de l'année, voir 1.4.1).

$$\vec{B}_0 = -\vec{\nabla}V_0$$

de plus, puisque  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$   $\Delta V_0 = 0$

Il suffit de connaître le potentiel harmonique  $V_0$  à la surface de la Terre pour le prolonger dans le manteau.

A l'ordre 1, on tient compte des champs électriques induits par la variation temporelle du champ magnétique (loi de Faraday).

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{j}_1 = \sigma \vec{E}_1 \quad (3)$$

$$\Gamma_{e,1} = \vec{k} \cdot \int \int_M \vec{r} \wedge (\vec{j}_1 \wedge \vec{B}_0) dv \quad (4)$$

Le calcul du couple électromagnétique se ramène à la détermination de  $\vec{j}_1$ .

Le champ magnétique s'écrit comme la somme d'une partie poloïdale  $\vec{B}_p$  et d'une partie toroïdale  $\vec{B}_t$  :

$$\begin{aligned} \vec{B}_t &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} T) \\ \vec{B}_p &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} P) \end{aligned}$$

A l'ordre 0:

$$T_0 = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{\partial(rP_0)}{\partial r} = -V_0 \quad (5b)$$

Nous calculerons séparément un couple électromagnétique (4) dit "poloïdal" (car associé à la partie poloïdale du champ  $\vec{B}_1$ ) et un couple "toroïdal" (Roberts, 1972). Par la loi d'Ampère, un courant électrique poloïdal  $\vec{j}_{1,p}$  est associé à un champ magnétique toroïdal et un courant électrique toroïdal  $\vec{j}_{1,t}$  est associé à un champ magnétique poloïdal.

## 1.2 Le couple électromagnétique "poloïdal"

La variation du flux du champ magnétique d'ordre zéro à travers le manteau conducteur induit les courants électriques toroïdaux  $\vec{j}_{1,t}$  (équations (2) et (3)). Comme tout champ de vecteurs, le champ électrique  $\vec{E}_1$  peut s'écrire comme la somme d'un terme radial, d'un gradient et d'une partie toroïdale. L'équation (2) détermine  $\vec{E}_1$  à un gradient près. Il n'y a pas de champs magnétiques toroïdaux à l'ordre 0: Le terme radial dans  $\vec{E}_1$  se réduit à 0. Par contre une partie toroïdale  $\vec{E}_{1,t}$  est associée au champ magnétique poloïdal.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 &= -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \dot{P}_0) \\ (\vec{E}_1)_t &= -\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \dot{P}_0)\end{aligned}\quad (6)$$

et par (3)

$$\vec{j}_{1,t} = -\sigma \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \dot{P}_0)$$

Nous obtenons ainsi une expression du couple poloïdal ne faisant intervenir que des termes d'ordre 0:

$$(\Gamma_{e,1})_p = \int \int_M r \sigma B_{r,0} \frac{\partial(\dot{P}_0)}{\partial \phi} dv \quad (7)$$

Le potentiel harmonique  $V$  est connu à partir de son développement

$$V = \alpha \sum_{n,m} (g_n^m, h_n^m) P_n^m(\cos \theta) (\cos m\phi, \sin m\phi) \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{n+1} \quad (8)$$

$P_n^m$  sont les fonctions associées de Legendre de première espèce semi-normalisées à la manière de Schmidt. Le développement du scalaire poloïdal  $P_0$  s'en déduit (par 5b):

$$P_0 = \alpha \sum_{n,m} \frac{1}{n} (g_n^m, h_n^m) P_n^m(\cos \theta) (\cos m\phi, \sin m\phi) \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{n+1}$$

Prenant garde à la normalisation adoptée, nous ramenons l'expression (7) à la somme (c rayon du noyau):

$$(\Gamma_{e,p})_1 = - \sum_{n,m} 4\pi \alpha^2 \frac{m(n+1)}{n(2n+1)} (g_n^m \dot{h}_n^m - h_n^m \dot{g}_n^m) \int_c^a \sigma(r) \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{2n+2} r^2 dr \quad (9)$$

Le terme prédominant du développement du champ magnétique  $\mathcal{G}_1^0$  ne contribue pas au couplage poloïdal. Pour aller plus loin dans l'évaluation du couple, il faut un modèle de la conductivité du manteau, et plus particulièrement de celle de ses couches inférieures; un poids  $(r/a)^{-2n}$  vient en effet en facteur de  $\sigma(r)$  dans l'expression (9). Je reviendrai plus tard sur ce que l'on peut dire de la conductivité

du manteau profond. Pour l'instant, citons déjà l'étude numérique de Stix et Roberts (1984), qui ont choisi une distribution de la forme:

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \sigma_c \left(\frac{r}{c}\right)^{-\alpha} & r < b \\ \sigma(r) &= 0 & b < r \end{aligned} \quad (10)$$

Alors (7) se transforme en la formule (41) de Stix et Roberts:

$$(\Gamma_{e,p})_1 = \sum_{n,m} 4\pi\alpha^5 \frac{m(n+1)}{n(2n+1)} \frac{1}{\alpha+2n-1} (g_n^m h_n^m - h_n^m \dot{g}_n^m) \sigma_c \left(\frac{\alpha}{c}\right)^{2n-1} \left(1 - \left(\frac{c}{b}\right)^{\alpha+2n-1}\right)$$

La valeur numérique du couple dépend du modèle de variation séculaire utilisé. Stix et Roberts ont utilisé les modèles proposés par Hodder (1981). J'ai repris leur étude à partir d'autres modèles (table 1) et j'ai obtenu comme eux un couple de l'ordre de  $-0.2 \cdot 10^{18}$  N.m, mais je ne retrouve pas les mêmes variations avec le temps: elles diffèrent d'un jeu de modèles à l'autre. Ce n'est pas très grave car Stix et Roberts ont observé (et nous le vérifierons ci-dessous) que le couple poloïdal est 10 fois plus faible que le couple toroïdal.

**Table 1:** Intensité du couple poloïdal calculée à partir de différents modèles de variation séculaire

Modèles	Année	couple ( $\sigma_c = 3000, \alpha = 30$ ) en $10^{18}$ N.m
AWC70	1965	-0.187
DK70	1970	-0.191
DK75	1975	-0.206
USGS82	1982	-0.285

### 1.3 Le couple électromagnétique toroïdal

#### 1.3.1 Principe du calcul

Le couple électromagnétique toroïdal naît des courants électriques poloïdaux associés à la partie gradient du champ électrique laissée indéterminée par l'équation (2). Ce champ électrique  $\vec{E}_{p,1}$  dérive d'un potentiel  $\psi_1$ . La loi d'Ohm démontre qu'il est équivalent de connaître le scalaire toroïdal  $T_1$  dans le manteau ou  $\psi_1$ .

$$\vec{j}_{1,p} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} T_1) = \sigma \vec{E}_1 = -\sigma \vec{\nabla} \psi_1 \quad (11)$$

Utilisant une écriture équivalente de  $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge$ , nous obtenons ( $\Delta$  étant le laplacien):

$$-\vec{\nabla}\psi_1 = \eta \left( \vec{\nabla} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rT_1) \right) - r\vec{e}_r \Delta T_1 \right) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{1}{\mu\sigma}$$

c'est à dire, supposant une dépendance radiale de la conductivité:

$$-\vec{\nabla} \left( \psi_1 + \eta \frac{\partial}{\partial r} (rT_1) \right) = - \left( \frac{\partial}{\partial r} (rT_1) \frac{d\eta}{dr} + \eta r \Delta T_1 \right) \vec{e}_r$$

$$\psi_1 = -\eta \frac{\partial}{\partial r} (rT_1) \quad (12)$$

$$\eta \Delta T_1 + \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial}{\partial r} (rT_1) = 0 \quad (13)$$

Il est possible de développer  $T_1$  et  $\psi_1$  sur une base d'harmoniques sphériques. Par exemple:

$$T_1(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m} t_n^{mc,s}(r) P_n^m(\cos\theta) (\cos m\phi, \sin m\phi) \quad (14)$$

(13) équivaut à une équation différentielle du second ordre en  $t_n^{mc,s}(r)$ . Deux conditions aux limites sont nécessaires pour compléter la détermination de  $t_n^{mc,s}$ . Il est clair que  $t_n^{mc,s}$  doit s'annuler à la frontière avec le milieu isolant. D'autre part l'équation (12) montre que les informations sur  $T_1$  se transposent immédiatement pour  $\psi_1$  et vice-versa. Ainsi le problème se réduit à déterminer les différences de potentiel électrique  $\psi_1$  qui, à l'interface noyau-manteau, créent les courants qui vont circuler dans le manteau. Pour cela, nous écrivons la continuité de la composante tangentielle du champ électrique à l'interface noyau-manteau. Si l'on suppose le noyau infiniment conducteur (hypothèse du flux gelé: je reviendrai sur son utilisation dans ce contexte en 1.5.2), la loi d'Ohm pour un conducteur en mouvement:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

se transforme en

$$\vec{E} = -\vec{u} \wedge \vec{B}$$

A la surface du noyau, utilisant la condition de non-pénétration, nous obtenons:

$$\vec{e}_r \wedge (-\vec{\nabla} \psi_1 + \vec{E}_{1,t}) = \vec{e}_r \wedge (-\vec{u} \wedge \vec{B}_0) = -\vec{u} B_{r,0} \quad (15)$$

En appliquant l'opérateur  $\vec{\nabla}_H$  à l'équation (15), nous la restreignons à sa partie poloïdale:

$$-\vec{\nabla}_H \cdot (\vec{u} B_{r,0}) = -\vec{\nabla}_H \cdot (\vec{e}_r \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \dot{P}_0))) = \frac{L^2(\dot{P}_0)}{r} = \frac{\partial B_{r,0}}{\partial t} \quad (16)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation qui permet de déduire les mouvements à la surface du noyau de la variation séculaire du champ magnétique (voir chapitre I.2.2); nous pouvons déduire  $\psi_1$  de la partie toroïdale du champ de vecteurs  $\vec{u} B_{r,0}$ . Il existe un scalaire  $\phi$  tel que:

$$(\vec{u} B_{r,0})_T = \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \phi)$$

avec

$$\phi = \sum_{n,m} \phi_n^{m,c,s} P_n^m(\cos \theta) (\cos m \phi, \sin m \phi)$$

L'équation (15) se traduit simplement par:

$$\psi_1(c, \theta, \phi) = -c \phi(\theta, \phi) \quad (17)$$

L'équation (17) nous donne la deuxième condition aux limites nécessaire à la détermination de  $T_1$ . Il est maintenant possible d'écrire le paramètre  $T_1$  dans le

manteau, de calculer les courants électriques poloïdaux  $\vec{j}_{1,p}$ , puis d'intégrer le couple exercé par la force de Lorentz dans le volume du conducteur pour obtenir le couple "toroïdal":

$$\Gamma_{e,1,\tau} = \vec{k} \cdot \int \int \int_M \vec{r} \wedge (\vec{j}_{1,p} \wedge \vec{B}_0) dv$$

La plupart des auteurs ont préféré court-circuiter cette intégration en faisant appel à l'expression du couple électromagnétique comme une intégrale de surface. Cela me permet de rappeler ce calcul très souvent utilisé.

### 1.3.2 Expression du couple électromagnétique (et en particulier de sa partie "toroïdale") comme une intégrale de surface

L'expression de la force de Lorentz comme divergence du tenseur de Maxwell permet de transformer l'intégrale de volume (1) en intégrale de surface (Rochester, 1962).

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{m}}$$

où

$$\underline{\underline{m}} = \frac{1}{\mu} \left( \vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{|B|^2}{2} \underline{\underline{I}} \right)$$

c'est à dire

$$m_{ij} = \frac{1}{\mu} \left( B_i B_j - \delta_{ij} \frac{|B|^2}{2} \right)$$

alors ( $\vec{n}$  normale sortante)

$$\Gamma_e = \vec{k} \cdot \int \int \int_M \vec{r} \wedge \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{m}} dV = \vec{k} \cdot \int \int_{\substack{r=a \\ r=c}} \vec{r} \wedge (\vec{n} \cdot \underline{\underline{m}}) dS \quad (18)$$

L'écart de la surface du noyau à la sphéricité n'est pas important pour le calcul du couple électromagnétique et le manteau reste décrit comme une couronne sphérique ( $c \leq r < \alpha$ ). En particulier ( $\vec{e}_r$  vecteur radial unitaire):

$$\begin{aligned}\vec{n} &= -\vec{e}_r \quad (r = c) \\ &= +\vec{e}_r \quad (r = \alpha)\end{aligned}$$

L'expression (18) se réduit à:

$$\Gamma_e = \frac{1}{\mu} \vec{k} \cdot \int_{r=c}^{\alpha} \int \vec{r} \wedge (\vec{n} \cdot (\vec{B} \otimes \vec{B})) dS$$

Intéressons nous tout d'abord à la surface noyau manteau ( $r=c$ ):

$$\begin{aligned}(\Gamma_e)_c &= \frac{1}{\mu} \vec{k} \cdot \int_{r=c} \int \vec{r} \wedge (\vec{n} \cdot (\vec{B} \otimes \vec{B})) dS = -\frac{1}{\mu} \vec{k} \cdot \int_{r=c} \int \vec{r} \wedge (B_r \vec{B}) dS \\ &= -\frac{c}{\mu} \int_{r=c} \int B_r B_\phi \sin \theta dS\end{aligned}\quad (19)$$

En particulier, si le manteau est supposé isolant:

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} V$$

avec 
$$V = \alpha \sum_{n,m} (g_n^m, h_n^m) P_n^m(\cos(m\phi), \sin(m\phi)) \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{n+1}$$

$$(\Gamma_e)_c = -\frac{1}{\mu} \int_{r=c} \int \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial \phi} dS$$

L'orthogonalité des harmoniques sphériques et la dépendance radiale de  $V$  nous permettent alors de vérifier:

$$(\Gamma_e)_c = 0$$

Une démonstration identique peut se conduire à la surface extérieure ( $r=a$ ) ; on trouve  $(\Gamma_e)_a = 0$  que le manteau soit conducteur ou isolant. Aussi le couple s'exerçant sur le manteau se réduit il à :

$$\Gamma_e = -\frac{c}{\mu} \int_{r=c} \int B_r B_\phi \sin \theta dS \quad (20)$$

Cette expression s'annule dès que le manteau est supposé isolant. La séparation du couple électromagnétique en partie toroïdale et poloïdale se retrouve dans son expression comme intégrale de surface. Reprenons l'approche par perturbation introduite en (1.1).

$$\underline{m} = \underline{m}_0 + \underline{m}_1$$

avec 
$$\underline{m}_0 = \frac{1}{\mu} \left( \vec{B}_0 \otimes \vec{B}_0 - \frac{|B_0|^2}{2} \underline{I} \right)$$

$$\underline{m}_1 = \frac{1}{\mu} \left( \vec{B}_0 \otimes \vec{B}_1 + \vec{B}_1 \otimes \vec{B}_0 - \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1 \underline{I} \right)$$

Nous venons de vérifier que  $\underline{m}_0$  est associé à un couple nul. A l'ordre 1, nous retrouvons en particulier le terme toroïdal défini en (1.1):

$$\underline{m}_{1,t} = \frac{1}{\mu} \left( \vec{B}_0 \otimes \vec{B}_{1,t} + \vec{B}_{1,t} \otimes \vec{B}_0 - \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_{1,t} \underline{I} \right)$$

L'équation (20) devient alors (un champ toroïdal n'a pas de composante radiale):

$$(\Gamma_{e,1})_t = -\frac{c}{\mu} \int_{r=c} \int B_{r,0} (B_{\phi,1})_t \sin \theta dS \quad (21)$$

Le calcul du couple toroïdal se réduit ainsi à l'expression du champ magnétique toroïdal à la surface du noyau.

### 1.3.3 Formulation du couple électromagnétique toroïdal comme fonction de la partie toroïdale de $\vec{u}B_r$

Dans cette partie, les différentes étapes conduisant à l'expression du champ magnétique toroïdal, et donc (par (21)) du couple électromagnétique "toroïdal", déjà décrites au chapitre 1.3.1., sont exposées en détail.

L'équation différentielle (13) gouverne le scalaire toroïdal dans le manteau (et donc, en particulier, le champ magnétique toroïdal à la base du manteau). Pour la résoudre, il faut connaître  $\eta$  dans le manteau, c'est à dire la conductivité  $\sigma$ . Je conserverai le profil (10):

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \sigma_c \left(\frac{r}{c}\right)^{-\alpha} & r < b \\ \sigma(r) &= 0 & b < r \end{aligned}$$

Alors (13) devient:

$$\Delta T_1 + \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial(rT_1)}{\partial r} = 0$$

c'est à dire (utilisant le développement (14)):

$$\forall n, m \quad c, s \quad \frac{1}{r} \frac{d^2(r t_n^{mc,s})}{dr^2} - \frac{n(n+1) t_n^{mc,s}}{r^2} + \frac{\alpha}{r^2} \frac{d(r t_n^{mc,s})}{dr} = 0 \quad (22)$$

Les solutions de (22) (équation d'Euler en (rt)) sont de la forme  $r^k$ , avec:

$$k_{\pm} = \frac{-(\alpha+1) \pm \sqrt{(\alpha+1)^2 + 4n(n+1) - 4\alpha}}{2} \quad (23)$$

Si  $\alpha = 0$ , nous retrouvons les deux valeurs  $n$  et  $-(n+1)$ . Le champ magnétique toroïdal s'annule à la frontière avec le milieu isolant ( $r=b$ ),  $t_n^{mc,s}$  peut donc s'écrire:

$$t_n^{mc,s}(r) = A_n^{mc,s} \left( \left(\frac{r}{b}\right)^{k^+} - \left(\frac{r}{b}\right)^{k^-} \right)$$

Les équations (12) et (17) permettent de déterminer le paramètre  $A_n^{m.c.s}$ . Finalement:

$$T_1(r, \theta, \phi) = \frac{c}{\eta_{c.n.m}} \frac{1}{q_n} \phi_n^{m.c.s} P_n^m(\cos \theta) (\cos m\phi, \sin m\phi) \quad (24)$$

J'ai posé:

$$q_n = \frac{(k^+ + 1) \left(\frac{c}{b}\right)^{k^+} - (k^- + 1) \left(\frac{c}{b}\right)^{k^-}}{\left(\frac{r}{b}\right)^{k^+} - \left(\frac{r}{b}\right)^{k^-}} \quad (25)$$

La formule (21) permet maintenant de calculer le couple électromagnétique toroïdal. D'une part:

$$B_{\phi, l, \tau} = -\frac{\partial T_1}{\partial \theta}$$

D'autre part (relation de récurrence entre polynômes non normalisés):

$$\sin \theta \frac{dP_{n,m}}{d\theta} = \frac{(n-m+1)n}{2n+1} P_{n+1,m} - \frac{(n+1)(m+n)}{2n+1} P_{n-1,m}$$

Alors le couple s'écrit:

$$\begin{aligned} \Gamma_{e,t,1} = & -4\pi c^4 \sigma_c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n+1}{(2n+1)\lambda_n^m} \left(\frac{\alpha}{c}\right)^{2n+2} \left( \frac{(n+2)(m+n+1)\lambda_{n+1}^m}{(2n+3)q_{n+1}} (\phi_{n+1}^{m,c} g_n^m + \phi_{n+1}^{m,s} h_n^m) \right. \\ & \left. - \frac{(n-1)(n-m)\lambda_{n-1}^m}{(2n-1)q_{n-1}} (\phi_{n-1}^{m,c} g_n^m + \phi_{n-1}^{m,s} h_n^m) \right) \quad (26) \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi la formule (2.24) de Roberts (1972) adaptée par Stix et Roberts (1984) pour le profil particulier (10) (leur expression (55)). Les coefficients  $\lambda_n^m$  permettent de relier polynômes non normalisés  $P_{n,m}$  et semi-Schmidt normalisés  $P_n^m$ :

$$P_n^m = \lambda_n^m P_{n,m} \quad (27)$$

$$m \neq 0 \quad \lambda_n^m = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} \quad \text{et} \quad \lambda_n^0 = 1 \quad (28)$$

**Cas particulier:** le couple associé à une rotation en bloc du noyau par rapport au manteau

En vertu de la loi de Lenz, les courants électriques  $\vec{j}$  circulant dans le manteau inférieur sont à l'origine de forces de Lorentz  $\vec{j} \wedge \vec{B}$  s'opposant à la cause qui leur a donné naissance: le couple électromagnétique associé à une rotation en bloc tend à la freiner. Par contre, la composante  $u_\phi \vec{e}_\phi$  d'un mouvement respectivement non zonal ou zonal mais distinct d'une rotation en bloc change de sens avec la longitude  $\phi$  ou la latitude  $\Theta$  et le couple total associé à ces mouvements peut s'écrire comme la différence de deux quantités s'équilibrant approximativement: nous devons nous attendre à ce qu'il soit petit devant le couple associé à une rotation en bloc. Je donne en annexe (A.2) l'expression analytique, calculée à partir de (26), du couple associé à une rotation en bloc.

Je décris maintenant brièvement comment obtenir la partie toroïdale de  $\vec{u}_{B_r}$  (c'est à dire les coefficients  $\phi_n^{m.c.s}$ ) pour un mouvement plus général.

#### 1.3.4 Détermination de la partie toroïdale de $\vec{u}_{B_r,0}$

Nous avons remarqué (équation (15)) que les parties toroïdales  $(\vec{u}_{B_r,0})_T$  et poloïdales  $(\vec{u}_{B_r,0})_P$  de  $(\vec{u}_{B_r,0})$  sont découplées. Alors que la partie poloïdale de l'équation (15) permet de déduire  $(\vec{u}_{B_r,0})_P$  de  $\partial B_{r,0}/\partial t$ , le calcul au préalable de  $(\vec{u}_{B_r,0})_T$  à partir d'un modèle de vitesse est nécessaire pour connaître le champ

électrique poloïdal à la base du manteau. La partie toroïdale de  $(\vec{u}_{B_{r,0}})$  n'est pas contrainte par la variation séculaire du champ magnétique; cela constitue (voir le chapitre I.2.2.1) l'indétermination théorique d'un calcul de champ de vitesse à la surface du noyau. Sans informations a priori, un champ de vitesse calculé à partir d'un modèle de variation séculaire en inversant (16) sera déterminé à un mouvement  $\vec{u}_0$ , tel que  $(\vec{u}_0 B_{r,0})$  soit toroïdal, près. Les conditions a priori, qui permettent de relier  $(\vec{u}_{B_{r,0}})_T$  à  $(\vec{u}_{B_{r,0}})_P$ , deviennent ainsi cruciales dans le cadre du calcul du couple électromagnétique s'exerçant sur le manteau. Nous pouvons nous attendre à obtenir des résultats entièrement différents d'un jeu de conditions a priori à un autre. Stix et Roberts (1984) ont cherché à représenter toute la variation séculaire par les seuls mouvements toroïdaux zonaux. Cette hypothèse suffit à assurer l'unicité du champ de vitesse calculé mais leur figure (5) montre qu'ils n'ont pu rendre compte que d'une petite partie de la variation séculaire (entre 10 et 40%). Pour ma part, j'ai retenu, comme dans le reste de ce mémoire, l'hypothèse de mouvements tangentiellement géostrophiques (voir I.2.2.3). En ne retenant que les mouvements toroïdaux zonaux et les mouvements symétriques par rapport au centre de la Terre (les seuls que l'on puisse calculer de façon fiable), nous nous assurons l'unicité théorique du champ de vitesse calculé.

Le calcul de la partie toroïdale de  $(\vec{u}_{B_{r,0}})$  est alors parallèle au problème direct de la méthode d'inversion du champ de vitesse à la surface du noyau à partir d'un modèle de variation séculaire. Il s'agit, dans ce dernier problème, de calculer les coefficients des vecteurs élémentaires de la partie poloïdale du champ de vecteur  $(\vec{u}_{B_{r,0}})$  connaissant un développement de  $\vec{u}$  en vecteurs poloïdaux  $\vec{\nabla}_S Y_n^m$  et toroïdaux  $\vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}_S Y_n^m$  élémentaires et d'un développement en harmoniques sphériques  $Y_n^m$  de  $B_{r,0}$ . C. Gire décrit dans sa thèse (Gire, 1985 pp 105-109)

comment exprimer l'interaction d'une harmonique donnée et d'un vecteur élémentaire (Elsasser, 1946; Bullard et Gellman, 1954; Roberts et Scott, 1965): il n'a pas de différence de principe entre le calcul de la partie toroïdale et celui de la partie poloïdale; en fait, les coefficients toroïdaux peuvent même se déduire, après quelques manipulations, des coefficients poloïdaux.

#### 1.4 Etude numérique du couple électromagnétique

Nous observerons que le couple toroïdal est dix fois plus intense que le couple poloïdal, étudié numériquement au chapitre 1.3. Cette partie est donc principalement consacrée à la partie toroïdale du couple.

##### 1.4.1 La conductivité du manteau inférieur

Les expressions (9) et (26) soulignent la dépendance linéaire des couples électromagnétiques en fonction de la conductivité (loi d'Ohm). Pour écrire le couple "toroïdal", nous avons adopté le profil particulier (10). Dans ce cas, la constante de temps électromagnétique du manteau dépend de  $\sigma_c/\alpha^2$  (e.g. Benton et Whaler, 1983; Braginsky et Fishman, 1976). D'autre part, pour  $\alpha$  grand,  $\Gamma_e$  varie comme  $\sigma_c/\alpha$  (voir (26)). Ainsi pour une constante de temps donnée,  $\Gamma_e$  varie comme  $\alpha$ . Si la zone conductrice est confinée à la base du manteau ( $\alpha$  grand), il est possible d'obtenir de forts couples tout en conservant des constantes de temps électromagnétiques raisonnables; la conductivité du manteau inférieur commande l'intensité du couple électromagnétique toroïdal (propriété déjà rencontrée dans le cas du couple poloïdal). Ainsi, nos informations sur la conductivité du manteau risquent de ne pas suffire pour déterminer l'intensité des couples.

Plusieurs phénomènes permettent de contraindre cette conductivité. Le champ magnétique d'origine externe pénètre d'autant plus profondément le manteau que sa période est plus longue. Ses variations induisent dans la Terre, faiblement conductrice, des courants électriques associés à un champ d'origine interne (e.g. Le Mouél, 1976: L'induction dans le globe pp 129-159). Il est possible de séparer champ inducteur et champ induit en faisant des hypothèses sur la géométrie de la source et en étudiant les différentes composantes (X,Z) du champ magnétique. Le rapport des intensités de ces composantes et leur déphasage dépendent de la période et nous informent sur la conductivité à la profondeur de pénétration correspondante. Elles permettent de contraindre la conductivité du manteau supérieur jusqu'à une profondeur d'environ 2000 km. A 600 km de profondeur, la conductivité est de l'ordre de  $1 \text{ Sm}^{-1}$ . Ducruix et ses coauteurs (1980), puis Achache et ses coauteurs (1981) étudièrent les longues périodes du champ (de 1 mois au cycle solaire de 11 ans). Ces derniers conclurent que la conductivité du manteau s'accroît régulièrement de 1 à  $50 \text{ Sm}^{-1}$  entre 600 et 2000 km de profondeur. La séparation des champs magnétiques d'origine interne et externe (Ducruix et al., 1980; Gavoret et al., 1986) reste très difficile. De nouveaux travaux incluant les données de ces dix dernières années et couvrant de nouvelles zones géographiques seraient donc bienvenus pour confirmer cette importante détermination de la conductivité du manteau moyen. Ils seraient également nécessaires pour mieux tirer profit des variations rapides du champ provenant du noyau.

Les signaux d'origine interne pourraient permettre de contraindre la conductivité du manteau inférieur. Backus (1983) a écrit un long article théorique, où il considère le manteau comme un filtre pour les différentes harmoniques spatiales du champ provenant du noyau. Il insiste sur deux paramètres, le temps de retard  $\tau$  et le temps de lissage  $\alpha$ . La lecture du chapitre consacré à cette

question dans le traité de Gubbins et Roberts (1987) permet une initiation rapide à ces différentes constantes de temps (pp51-61). Pour un profil de type (10),  $\sigma \approx 1/\sqrt{2}\tau$ . Backus appelle à la prudence dans l'interprétation des changements rapides et localisés du champ. A ma connaissance, aucune étude rigoureuse prenant en compte les recommandations de Backus n'a été menée jusqu'à présent. Cependant, un saut brusque de variation séculaire, de caractère planétaire, a eu lieu, en deux ou trois ans au plus, autour de 1969 et est très bien décrit (Courtilot et al., 1978; Ducruix et al., 1980). La séparation des champs d'origine interne et externe (Gavoret et al., 1986; Rakotozafy, 1988) montre des variations rapides (sur quelques années) et régionales du champ provenant du noyau. Ces différentes observations plaident en faveur de constantes de temps électromagnétiques  $\tau$  et  $\sigma$  de l'ordre de l'année (au plus). Achache et ses coauteurs (1980) utilisèrent le saut de variation séculaire de 1969 pour contraindre la conductivité du manteau inférieur: elle ne peut pas dépasser quelques centaines de  $\text{Sm}^{-1}$  en moyenne dans une couche de 700km au-dessus de la frontière noyau-manteau. Je tiendrai compte de ce type d'arguments en calculant la constante de temps  $\tau$  associée aux différents modèles de conductivité étudiés (j'ai repris l'expression (19) de Stix et Roberts (1984), obtenue par Backus (1983), sensiblement équivalente à la formule (13) de Braginsky et Fishman (1976); elles furent l'une et l'autre utilisées dans le contexte du calcul d'un couple électromagnétique).

Un troisième type de contrainte, la mesure en laboratoire sous forte pression et à température élevée de la conductivité des matériaux du manteau se révélera peut-être fondamentale. Elle pourrait interdire, par exemple, des profils de conductivité fantaisistes permettant de satisfaire trop de contraintes. Déjà, tous les auteurs en tiennent compte en supposant que la conductivité augmente avec la profondeur. Le travail récent de Peyronneau et Poirier (1989) cadre bien avec le profil de conductivité de Achache et al(1981) (voir ci-dessus). Ces auteurs

n'ont pas cherché à reproduire les températures du manteau mais ont extrapolé à ces températures les résultats obtenus à basse température. La conductivité serait de l'ordre de  $100 \text{ Sm}^{-1}$  à la frontière noyau-manteau (extrapolation en température mais aussi en pression). La dernière estimation de Li et Jeanloz (1989) est légèrement supérieure mais correspond à une perovskite  $(Mg, Fe)SiO_4$  très enrichie en fer et concorde donc très bien avec ces résultats.

Le profil d'Achache et al. (confirmé par Peyronneau et Poirier) ne correspond pas exactement à une loi du type (10). Cependant, nous vérifierons que seule la conductivité des couches proches du noyau doit être prise en compte pour ce type d'études. J'adopterai comme premier profil de conductivité type (modèle 1), le profil ci-dessous, voisin de celui d'Achache et al. dans les couches inférieures du manteau (figure 1):

$$\sigma_1(r) = 150 \left( \frac{c}{r} \right)^{-9} \text{ Sm}^{-1}$$

Deux constantes de temps sont associées à ce profil (en années):

$$\tau = 0.9 \quad \sigma = 0.6$$

Stix et Roberts (1984) ont retenu un profil qui me semble moins réaliste. Je ne peux néanmoins pas l'exclure (modèle 2):

$$\sigma_2(r) = 3000 \left( \frac{c}{r} \right)^{-30} \text{ Sm}^{-1}$$

$$\tau = 1.7 \quad \sigma = 1.1$$

J'utiliserai principalement ces deux profils pour l'étude numérique.

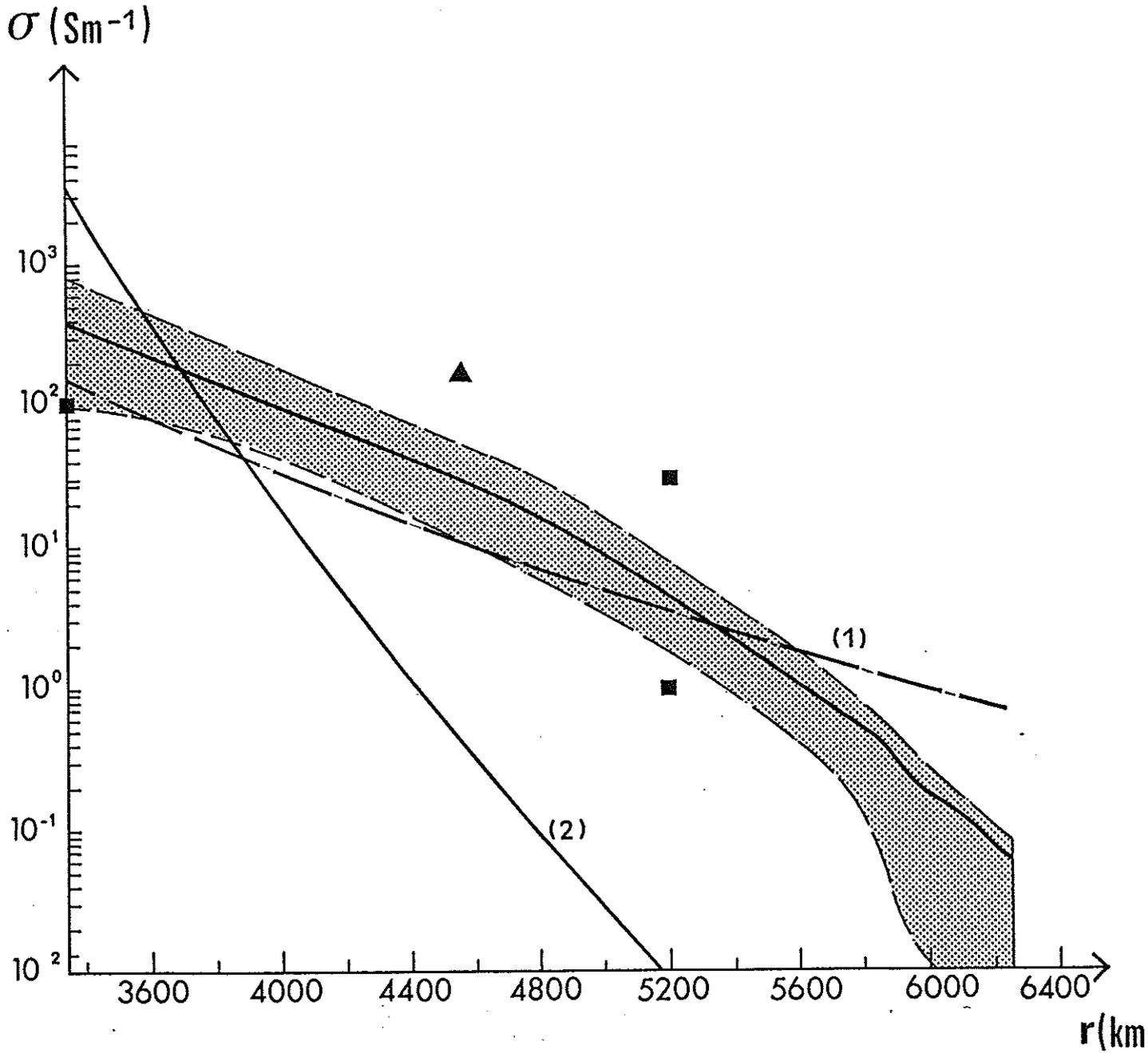


Figure 1: comparaison des modèles (1) et (2) de conductivité du manteau inférieur avec les estimations de Peyronneau et Poirier (1989) (carrés) et de Li et Jeanloz (1989) (triangle) et avec le profil d'Achache et coll. (1981).

### 1.4.2 Intensité du couple électromagnétique "toroïdal"

Pour un champ de vitesse à la surface du noyau donné (ici le modèle construit par Gire et Le Mouél (1989) pour l'année 1980), l'expression (25) permet de calculer les couples toroïdaux associés respectivement aux modèles de conductivité (1) et (2):

$$(1) \quad \Gamma = -0.255 10^{18} N.m$$

$$(2) \quad \Gamma = -1.735 10^{18} N.m$$

Dans les deux cas, j'ai supposé la couche conductrice épaisse de 2000 km, et le modèle IGRF80 représente le champ magnétique d'ordre 0. J'ai déjà discuté en 1.2 le couple électromagnétique poloïdal associé au modèle (2). Le couple toroïdal est 6 à 8 fois plus élevé (suivant le modèle de variation séculaire retenu pour le couple poloïdal). Ce calcul s'accorde bien avec les résultats de Stix et Roberts (modèle 2). L'ordre de grandeur ainsi obtenu prouve que le couple électromagnétique est susceptible de jouer un rôle dans les irrégularités "décennales" de la rotation de la Terre (Le couple maximal nécessaire est de l'ordre de  $10^{18} N.m$ , voir la première partie de ce mémoire).

Pour assurer la validité des résultats ainsi obtenus, j'ai testé l'influence de l'épaisseur de la couche conductrice (table 2) et du degré de troncation des mouvements (table 3). Les valeurs sont données en  $10^{18} N.m$ .

**Table 2:**

épaisseur (km)	100	200	300	500	1000	2000
Modèle 1	-0.065	-0.114	-0.150	-0.196	-0.240	-0.255
Modèle 2	-0.997	-1.417	-1.595	-1.706	-1.735	-1.735

Les valeurs calculées dépendent peu de l'épaisseur de la couche conductrice. A eux seuls les 300 premiers kilomètres sont responsables de 92% du couple dans le cas du modèle (2).

**Table 3:**

Degré de troncation	6	7	8	9
Modèle 1	-0.208	-0.237	-0.236	-0.255
Modèle 2	-1.349	-1.569	-1.590	-1.735

A  $n=9$ , le calcul n'a pas encore complètement convergé mais les valeurs obtenues peuvent être supposées représentatives du couple total.

Notre discussion qualitative (1.4.1) laissait prévoir un rapport 6 entre les couples associés aux modèles de conductivité 1 et 2. Le calcul précis confirme l'analyse. Pour illustrer plus complètement les considérations du chapitre précédent sur la conductivité du manteau, j'ai porté dans un diagramme  $(\sigma(c), \tau)$  (figure 2) les courbes représentatives de l'exposant de décroissance  $\alpha$ , de l'intensité du couple toroïdal  $\Gamma$ , et de la valeur de la conductivité 700 km au-dessus de la

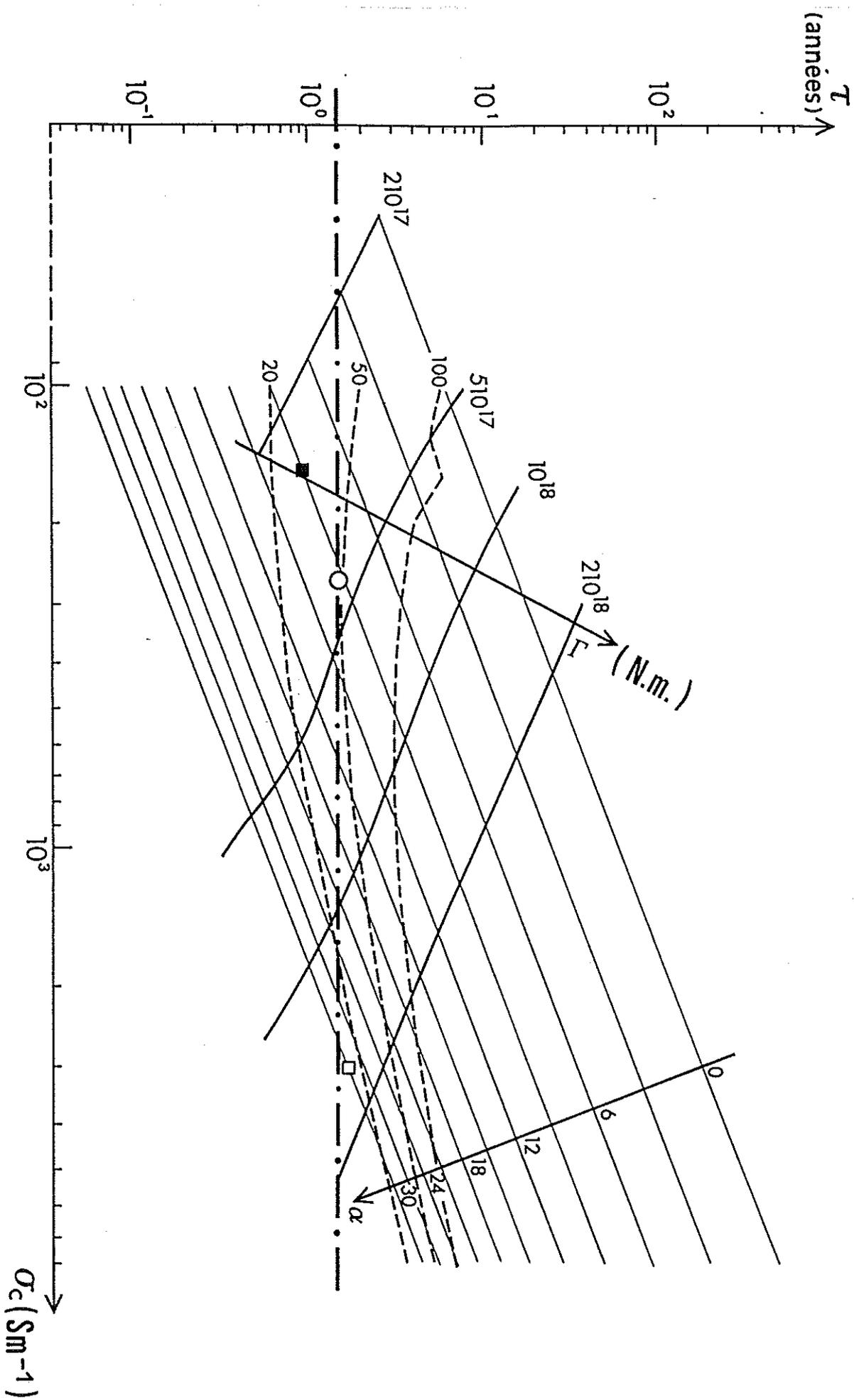
base du manteau (profondeur maximale de pénétration des signaux externes). Clairement, il ne suffit pas de connaître la constante de temps électromagnétique du manteau pour contraindre l'intensité du couple toroïdal. De même la conductivité à  $(c + 700 \text{ km})$  n'est pas déterminante. D'ailleurs, nous venons de constater (table 2) que prolonger le modèle 2 jusqu'à cette profondeur ne change pas beaucoup l'intensité calculée du couple toroïdal. A fortiori, il est bien sûr impossible d'utiliser les résultats de la magnétotellurique (voir Backus, 1983) pour caler un profil de conductivité destiné à un calcul de couple électromagnétique. Dans le même ordre d'idée, une couche de faible épaisseur (100 km) de conductivité élevée ( $3000 \text{ Sm}^{-1}$ ) à la base du manteau, qui pourrait correspondre à la couche D'', mise en évidence par les sismologues (Bullen, 1975) et considérée comme une couche limite thermique, voire chimique, associée à la convection dans le manteau serait associée à un couple électromagnétique important:

$$\Gamma = 1.510^{18} N.m \quad \tau = 0.59 an$$

Aucune méthode électromagnétique ne nous permet d'affirmer qu'une telle couche conductrice n'existe pas. Pour résumer, notre connaissance de la conductivité du manteau ne suffit pas à contraindre l'intensité du couple électromagnétique.

L'un des principaux enjeux de cette étude du couple électromagnétique est de comparer le couple associé à la seule rotation en bloc, qui fut le prétexte à de nombreux travaux, et le couple associé à l'ensemble des mouvements, que nous sommes les premiers à envisager. La table 4 illustre cette comparaison; elle correspond au modèle de conductivité (2).

**Figure 2:** intensité du couple électromagnétique toroïdal  $\Gamma$ , exposant de décroissance  $\alpha$ , et conductivité (courbes pointillées) à  $(c + 700)km$  (profondeur maximale de pénétration des signaux d'origine externe) en fonction de la conductivité  $\sigma_c$  à la base du manteau et du temps  $\tau$  nécessaire à un signal provenant du noyau pour parvenir à la surface. La droite épaisse alternée matérialise une borne supérieure plausible (18 mois) pour  $\tau$ . Les différents sigles permettent de comparer les estimations de la conductivité utilisées dans ce travail: cercle, Achache et coll.(1981); carré plein, modèle 1; carré vide, modèle 2 adopté par Stix et Roberts (1984).



**Table 4:**

Modèle de variation séculaire utilisé pour le calcul des mouvements	Couple associé à l'ensemble du mouvement	Couple associé à la rotation en bloc
AWC70	-1.72	-1.48
USGS80	-1.74	-1.50
IGRF85	-1.93	-1.66

Le terme de rotation en bloc  $t_1^0$  détermine en grande partie le couple et ses variations avec le temps. Une connaissance précise de  $t_1^0$  est un préalable indispensable à un calcul du couple électromagnétique toroïdal. Nous avons souligné l'importance des conditions a priori imposées au champ de vitesse à la surface du noyau (1.3.4); nous comprenons maintenant qu'elles sont surtout fondamentales en cela qu'elles permettent de calculer exactement la rotation relative noyau-manteau. Dans la mesure où nos estimations de  $t_1^0$  sont du même ordre que celles proposées par Stix et Roberts, nous obtenons des amplitudes du couple électromagnétique "toroïdal" comparables.

## 1.5 Fluctuations du couple électromagnétique

### 1.5.1 Amplitude des fluctuations

Nous avons en fait commencé à aborder cette question en étudiant les couples produits par des modèles de champ de vitesse calculés pour des époques différentes (table 4). La table 5 permet de comparer les couples (exprimés en

$10^{18}$  N.m) associés aux modèles de conductivité 1 et 2 .

**Table 5**

Modèle de variation séculaire	AWC70	USGS80	IGRF85
Modèle 1	-0.255	-0.255	-0.282
Modèle 2	-1.72	-1.74	-1.93

Le couple nécessaire pour expliquer les irrégularités de la longueur du jour sur la période 1965-1985 a augmenté linéairement d'environ  $5 \cdot 10^{16}$  N.m par an (voir I.1). Les modèles 1 et 2 sont respectivement associés à des fluctuations du couple électromagnétique toroïdal de l'ordre de  $2 \cdot 10^{15}$  N.m par an et  $2 \cdot 10^{16}$  N.m par an. Le modèle 1, que nous avons retenu comme le plus plausible, correspond ainsi à un couple électromagnétique au moins 10 fois trop faible. Son adoption conduirait à négliger tout rôle des couples électromagnétiques dans les irrégularités de rotation de la Terre. Par contre le modèle 2 permet au couple d'approcher l'amplitude nécessaire. Le couple reste insuffisant (dans un rapport 3) mais le calcul souffre de trop d'incertitudes pour permettre de condamner ce modèle.

### 1.5.2 Un couple stable: Le couple produit par la diffusion de champs toroïdaux du noyau dans le manteau

Comme l'avaient observé Stix et Roberts (1984), le couple fluctue autour d'une valeur moyenne négative. Or la moyenne (sur plusieurs dizaines d'années) du couple à l'origine des irrégularités de la rotation de la Terre est petite devant l'amplitude de ses fluctuations décennales (voire nulle). Il faut donc imaginer

un couple stable agissant en sens contraire. Stix et Roberts l'interprétèrent comme un couple associé à la diffusion dans le manteau de forts champs électromagnétiques toroïdaux provenant du noyau mais sans effets mesurables à la surface de la Terre. Dans leur esprit, ce couple est même le moteur des irrégularités de la rotation de la Terre. Seul, il ralentirait indéfiniment le noyau par rapport au manteau. La rotation différentielle ainsi produite engendre à son tour un couple: nous l'avons calculé ci-dessus. L'état d'équilibre auquel parviennent ces deux couples est caractérisé par l'amplitude de la rotation différentielle entre noyau et manteau. Bullard(1948) avait décrit ce mécanisme dans le cadre d'une théorie de la dérive vers l'ouest. Son modèle lui permettait d'interpréter le signe du couple de diffusion: il inclut de forts champs électromagnétiques toroïdaux qui cherchent à accélérer les couches externes du noyau (et donc par diffusion le manteau) pour compenser un ralentissement "mécanique" de ces couches. Cependant le mécanisme intuitif de Bullard, expliquant la décélération des couches externes du noyau par des échanges de masse à l'intérieur du noyau et un couple des forces de Coriolis entre coquilles sphériques concentriques ne fonctionne pas: les forces de Coriolis interdisent les mouvements radiaux zonaux (voir I.2.3.4) qui seuls pourraient transporter du moment cinétique d'une coquille à l'autre. Il faut abandonner cette partie de la théorie.

Le couple produit par la diffusion de champs toroïdaux n'a pas été pris en compte jusqu'à présent puisque cette diffusion viole l'hypothèse du flux gelé, à la base de nos calculs. Il faut remplacer l'équation (15), qui exprime la continuité de la composante tangentielle du champ électrique, par:

$$\vec{e}_r \wedge (-\vec{\nabla} \psi_1 + \vec{E}_{1,t}) = \vec{e}_r \wedge \left( -\vec{u} \wedge \vec{B}_0 + \frac{\vec{j}}{\sigma_r} \right) \quad (29)$$

$\sigma_n$  est la conductivité du noyau. Comme nous l'avons fait pour obtenir l'expression (17) à partir de l'équation (15), nous restreignons l'équation (29) à sa partie toroïdale. L'identité obtenue est plus lisible si l'on utilise (12) pour remplacer  $\psi_1$ .

$$-\eta_m \left( \frac{\partial(rT_1)}{\partial r} \right)_m = -c\phi - \eta_n \left( \frac{\partial(rT)}{\partial r} \right)_n \quad (30)$$

La diffusion de champs toroïdaux de l'intérieur du noyau peut être source de courants électriques à la base du manteau et donc d'un couple électromagnétique. Pour évaluer ce dernier, le "couple de diffusion", nous pouvons reconduire le calcul du couple toroïdal en remplaçant simplement  $\phi$  par  $\eta_n/c(\partial(rT)/\partial r)_n$ . Le paramètre  $\partial T/\partial r$  est très important pour juger de la validité de l'approximation géostrophique (I.2.3.3). L'équation (26) permet de calculer le couple de diffusion  $\Gamma_d$  à partir d'un développement harmonique de  $\eta_n/c(\partial(rT)/\partial r)_n$ . Je me limite à:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T_2^0}{\partial r} P_2^0(\cos\theta)$$

C'est le seul terme du développement à interagir avec la partie dipôle  $g_1^0$  (voir eq. 26); cette géométrie du champ toroïdal est également la plus plausible (I.2.2.3).

Alors,

$$\Gamma_d = -\frac{4\pi c^4 \sigma_c \eta_n}{q_2} \frac{\partial T_2^0}{\partial r} \left( \frac{4}{5} \left( \frac{a}{c} \right)^4 g_1^0 - \frac{24}{35} \left( \frac{a}{c} \right)^8 g_3^0 \right) \quad (31)$$

La valeur du paramètre  $\partial T/\partial r$  telle que le couple de diffusion équilibre la partie stable du couple toroïdal ne dépend pratiquement pas du modèle de conductivité retenu (comparer les équations (26) et (31)). Le champ de vitesse étudié jusqu'à présent correspond à:

$$\frac{\partial T_2^0}{\partial r} \approx 2 \cdot 10^{-8} T m^{-1}$$

Une telle valeur est compatible avec l'approximation géostrophique (voir aussi

(I.2.3.3)).

Stix et Roberts ont cherché à corrélérer la partie variable du couple produit par les mouvements du noyau au couple nécessaire pour interpréter les irrégularités de la longueur du jour. Dans le cadre de cette théorie, il est fondamental de vérifier que le couple de diffusion varie sur des constantes de temps beaucoup plus grandes que le couple calculé à partir des mouvements. Le champ toroïdal principal est stable. Ici, nous cherchons à mesurer l'influence de la diffusion de champs toroïdaux rapidement variables (dont les constantes de temps seraient comparables à celles des irrégularités de rotation de la Terre):

$$B_t = \text{Re}(e^{i\omega t} B_t)$$

Braginsky, en particulier, (1984) a étudié la couche-limite de diffusion du champ magnétique; j'ai rendu compte de ce travail dans un chapitre précédent (I.2.3.6.2). Dans le corps du noyau, pour les constantes de temps considérées, nous pouvons négliger, comme le montre l'analyse dimensionnelle, le terme de diffusion devant le terme de création de champ:

$$\frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} = (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}))_T \quad (32)$$

où

$$\vec{B}_T = \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} T)$$

Mais à la surface du noyau le champ toroïdal doit s'annuler (je supposerai pour ce calcul d'ordre de grandeur le manteau isolant). Le champ varie donc rapidement près de la surface et la diffusion doit être prise en compte. Pour cela, nous introduisons un second champ  $\vec{B}_T'$  tel que:

$$\begin{aligned} \vec{B}_T' &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} T') \\ \frac{\partial T'}{\partial t} &= \eta \Delta T' \end{aligned} \quad (33)$$

$r = c$

$$T' = -T$$

$(c - r) \rightarrow \infty$

$$T' = 0$$

Je dois comparer (équation (30))  $c\phi$  à  $\eta_n(\partial(rT')/\partial r)_n$ . L'ordre de grandeur du premier terme se déduit immédiatement de la définition de  $\phi$ :

$$c\phi = O(cUP)$$

P et U sont les dimensions caractéristiques du champ magnétique poloïdal et de la vitesse à la surface du noyau. Négligeant les dérivées horizontales devant les dérivées radiales, l'équation de diffusion (33) se simplifie en:

$$\frac{\partial(rT')}{\partial t} \approx \eta_n \frac{\partial^2(rT')}{\partial r^2}$$

$$rT'(r) = cT'(c)e^{(i\omega/\eta_n)^{1/2}(r-c)}$$

$$\frac{\partial(rT')}{\partial r} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{\eta_n}\right)^{1/2} cT'(c) = -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\omega}{\eta_n}\right)^{1/2} cT(c)$$

L'équation (32) permet d'estimer le champ toroïdal à la surface du noyau ( $cT(c) \approx UP/\omega$ ). Alors:

$$\eta_n \left( \frac{\partial(rT')}{\partial r} \right)_n = O \left( cUP \left( \frac{\eta_n}{c^2\omega} \right)^{1/2} \right) = O \left( cUP \left( \frac{\delta}{c} \right) \right)$$

$\delta$  est l'épaisseur caractéristique de la couche limite de diffusion. Pour une période  $T=100$  ans,  $\delta \approx 40$  km. L'équation (30) se limite alors à (voir aussi les équations 12 et 17):

$$-\eta_m \left( \frac{\partial(rT_1)}{\partial r} \right)_m = -c\phi$$

La partie variable (sur des constantes de temps inférieures à 100 ans) du couple toroïdal peut être estimée à partir des seuls mouvements de la surface du noyau. Le couple de diffusion se réduit à un terme stationnaire.

### 1.5.3 Evolution comparée du couple électromagnétique et des mouvements du noyau

Nous pouvons alors, à la suite de Stix et Roberts (1984), tenter de comparer les fluctuations du couple électromagnétique calculées à partir des formules (9) et (26) à celles du couple responsable des irrégularités observées dans la longueur du jour. Seule une étude qualitative semble possible pour l'instant. En effet la rotation en bloc  $t_1^0$  joue un rôle prédominant dans la théorie du couplage électromagnétique (1.4.2) et nous pouvons condenser l'étude menée jusqu'à présent dans la formule:

$$\Gamma(t) = -A(t_1^0(t) - t_0) \quad (34)$$

$A > 0$ ,  $t_1^0$  comptée positivement vers l'ouest.  $\Gamma_0 = At_0$  représente le couple de diffusion constant d'après 1.5.2.  $A$ , inconnu, dépend de la conductivité du manteau inférieur. J'ai expliqué (1.3.4) pourquoi la méthode d'estimation de  $t_1^0$  proposée par Stix et Roberts (1984) ne me semble pas adéquate: nous ne pouvons tirer aucune conclusion de l'absence de corrélations, au cours de la période qu'ils ont étudiée (1903-1975), entre leurs valeurs du couple électromagnétique calculées à partir du modèle de champ magnétique tronqué à l'ordre le plus élevé (et donc théoriquement les plus représentatives) et le couple dérivé par Morrison (1979) de l'accélération de la Terre (leur figure (6)). De même, nos travaux, en particulier les derniers calculs de mouvements (Gire et Le Mouél, 1989), qui servent de base à cette étude, n'ont pas encore atteint le degré de précision requis pour décrire avec certitude l'évolution de la dérive vers l'ouest (voir aussi I.2.4 et I.2.5).

Limitons nous, comme dans la première partie de ce mémoire, à la période 1965-1985. Il semble que la dérive vers l'ouest s'est accrue entre 1965 et 1980 (I 2.4.3): le couple électromagnétique agissant sur le manteau, calculé à partir

de (34), a diminué de 1965 à 1980 alors que le couple nécessaire pour expliquer les irrégularités de rotation de la Terre a augmenté d'environ  $5 \cdot 10^{16}$  N.m/an pendant cet intervalle de temps (I 1). Il y a contradiction. De surcroît, nous avons proposé (I 2.5) une technique d'évaluation du moment cinétique du noyau. L'estimation du moment cinétique repose sur deux paramètres  $t_1^0$  et  $t_3^0$ , coefficients du développement en harmoniques zonales  $P_n^0$  de la partie toroïdale zonale du champ de vitesse à la surface du noyau. De 1965-70 à 1980-82, le moment cinétique du noyau a diminué. Pour cette période, les variations de  $t_3^0$ , telles que nous les avons calculées, correspondent à un accroissement du moment cinétique. Notre théorie exige donc que la dérive vers l'ouest (à laquelle est associée un moment cinétique relatif du noyau négatif) ait augmenté entre 1965-70 et 1980-82. L'hypothèse de couplage électromagnétique ne peut s'accorder ni avec notre méthode d'estimation du moment cinétique du noyau ni avec nos évaluations actuelles des vitesses zonales à la surface du noyau (paramètres  $t_1^0$  et  $t_3^0$ ).